Matematika rubikove kocke

Malenica, Samanta

Undergraduate thesis / Završni rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Split, Faculty of Maritime Studies / Sveučilište u Splitu, Pomorski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:164:102144

SVEUČILIŠTE U SPLITU

POMORSKI FAKULTET U SPLITU

SAMANTA MALENICA

MATEMATIKA RUBIKOVE KOCKE

ZAVRŠNI RAD

SPLIT, 2019.

SVEUČILIŠTE U SPLITU

POMORSKI FAKULTET U SPLITU

STUDIJ: PEIT

MATEMATIKA RUBIKOVE KOCKE

ZAVRŠNI RAD

MENTOR:

mag.ing. Goran Kovačević

STUDENT:

Samanta Malenica

(MB:0171272611)

SPLIT, 2019.

SAŽETAK

Rubikova kocka je jedna od najprodavanijih igračaka u povijesti čovječanstva. Nema čovjeka koji se nije okušao u slaganju same kocke. Rubikova kocka je trodimenzionalna mehanička igračka, koju je 1974. godine izumio mađarski kipar i profesor arhitekture Erno Rubik. Rubik je igračku prvobitno nazvao "Čarobna kocka" i licencirao je 1980. godine, a ona je doživjela nezapamćen uspjeh, prvo u Njemačkoj, gdje je 1980. proglašena igračkom godine, a zatim i širom svijeta. Važnost Rubikove kocke je višestruka, kao igračka važna je najmlađima, ali i starijima. Nadalje prepoznata je i u znanstvenom smislu pa je sve više ljudi proučava i istražuje. Kao pojava popularna je diljem svijeta.

Ključne riječi*: Rubikova kocka, igračka, metodologija, slaganje*

ABSTRACT

The Rubik's Cube is one of the best-selling toys in human history. There is no man who has not tried his hand at stacking the dice. Rubik's Cube is a three-dimensional mechanical toy, invented in 1974 by Hungarian sculptor and professor of architecture Ernő Rubik. Originally dubbed the "Magic Cube" by the Rubik, it was licensed in 1980, and it was an unprecedented success, first in Germany, where in 1980 it was named Player of the Year and then worldwide. The importance of the Rubik's Cube is multifaceted, as the toy is important to the youngest as well as the elderly. It is further recognized in scientific terms and is being studied and researched by more and more people. As a phenomenon it is popular all over the world.

Keywords: *Rubik's cube, toy, methodology, stacking*

SADRŽAJ

1. UVOD

Predmet istraživanja ovog rada je istražiti važnost i metodologiju Rubikove kocke. Definirat će se čimbenici i varijacije kod Rubikove kocke. Kao i načini i potezi prilikom slaganja iste. Rubikova kocka je trodimenzionalna mehanička igračka, koju je 1974. godine izumio mađarski kipar i profesor arhitekture Erno Rubik. Rubik je igračku licencirao 1980. godine nazvavši je Čarobna kocka. Iste godine, Rubickova kocka, doživljava nezapamćen uspjeh, prvotno u Njemačkoj a zatim i širom svijeta te biva proglašena igračkom godine. Održana su mnogobrojna natjecanja u brzom slaganju (najvještiji je bez problema slože za 20-ak sekundi), a postoje i natjecanja u slaganju jednom rukom ili čak vezanih očiju (natjecatelj dugo promatra kocku, planira i pamti korake, a zatim vezanih očiju slaže). Fascinantna je činjenica da samo 5,8% ljudi u svijetu može složiti Rubikovu kocku. Cilj ovog rada je teoriju grupa, koja se često u literaturi prikazuje na apstraktan način, vizualizirati pomoću Rubikove kocke. To je moguće učiniti upravo zahvaljujući činjenici da skup svih mogućih pokreta na Rubikovoj kocki čini algebarsku strukturu grupe.

2. RUBIKOVA KOCKA

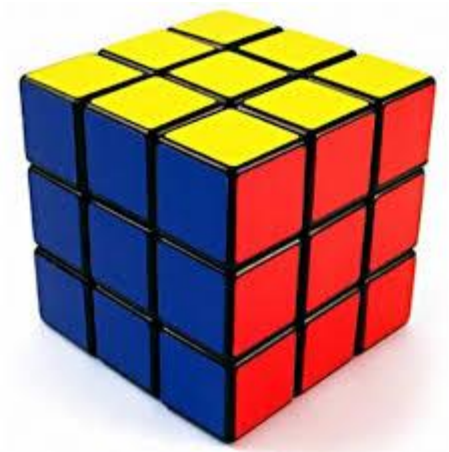
U ovom dijelu rada definirat će se problematika Rubikove kocke, odnosno njezin razvoj, povijest te mogućnosti koje ona pruža. Rubikova kocka je najprodavanija igračka svih vremena ako se gleda kao takva.

2.1. POVIJESNI PREGLED RAZVOJA RUBIKOVE KOCKE

Erno Rubik je rođen 13. srpnja 1944. godine u Budimpešti, Mađarska. Njegova majka je bila umjetnica i pjesnikinja, a otac strojarski tehničar i avio inžinjer. Erno je 1967. godine diplomirao na Fakultetu tehničkih znanosti u Budimpešti, nakon čega je završio srednju školu dekorativne umjetnosti interijera. Od 1971. do 1975. godine radio je kao arhitekt, nakon čega započinje akademsku karijeru kao profesor. Oženio se 1977. godine arhitekticom interijera i 1978. godine dobiva kćer Annu [1].

Erno Rubik je postao urednik magazina za igre i puzzle, nakon čega je osnovao vlastiti ’Rubik Studio’ koji se bavi dizajnom namještaja, igrica i mnogih drugih varijacija na temu ’Rubikove kocke’. Godine 1990. imenovan je za predsjednika Mađarske akademije za inžinjerstvo i osnovao je ’International Rubik Foundation’ koja pomaže i podržava u radu nadarene inžinjere i studente industrijskog dizajna [2].

Erno je bio fasciniran geometrijom 3D oblika i proučavajući objekte u prostoru napravio je prvi uzorak kocke sastavljene od 26 malih kockica različite boje. Erno je dobio inspiraciju od oblih, glatkih kamenčića s obale Dunava koji su mu dale rješenje kako napraviti cilindrične oblike i osovine u kocki. Nakon početnog oduševljenja zbog kombinacija različitih boja na kocki, Erno Rubik se zapitao kako vratiti kocku u ’početno stanje’. Shvatio je da nasumičnim okretanjem kocke za svog života neće uspjeti vidjeti kocku s kojom je započeo. Tek nakon ozbiljnog promišljanja o logici svakog pokreta kocke, nakon mjesec dana našao je pravu kombinaciju od mogućih 43 trilijuna. Sve se to dogodilo u proljeće 1974. godine, a već 1975. godine Erno Rubik je prijavio igračku “Rubikova kocka” Mađarskom zavodu za patente. Izum je najprije nazvan Magična kocka, a 1980. godine ime joj je promijenjeno u Rubikova kocka u čast izumitelju. Pod nazivom ’Rubikova kocka’ je poznata gotovo u svim jezicima osim u njemačkom, židovskom, kineskom, portugalskom i islandskom. U židovskom jeziku nazivaju je Madarskom kockom, a u ostalima Magičnom kockom. U to vrijeme Mađarska je bila izolirana iza "Željezne zavjese" i tek se početkom 1978. Ta čudna igračka pojavila u Mađarskim trgovinama igračaka. U početku je prodaja tekla slabo sve dok ju nisu otkrili dvojica Mađara: poslovni čovjek Tiber Laszi koji ju je odnio 1979. godine na izložbu igračaka u Nurnberg i Tom Kremer koji je stupio u kontakt s Ideal Toy Company koja je "pokazala" Rubikovu kocku cijelom svijetu. U međuvremenu, engleski matematičar David Singmaster otkrio je fenomenalne matematičke osobine kocke o kojima piše u članku u časopisu 'Scientific Americans', 1979. godine, čime si je Rubikova kocka osigurala još veću pozornost javnosti. Internacionalni interes za kocku počinje 1980. godine, a već 1981. potražnja je nadmašila kapacitete proizvodnje [1].



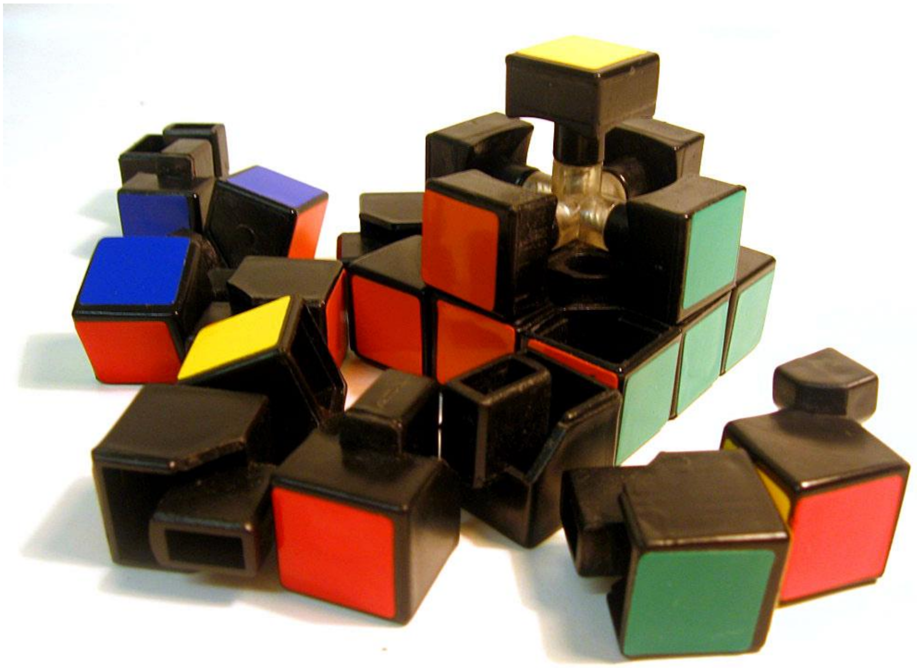
Slika 1. Prikaz Rubikove kocke [17]

2.2. STRUKTURA RUBIKOVE KOCKE

Na svakoj strani Rubikove kocke je devet manjih kocki. Zbog toga se čini kao da se Rubikova kocka sastoji od 27 manjih kocki. Međutim, ako se kocka rastavi, može se vidjeti da središnja mala kocka – zapravo ne postoji.
Razlikuju se tri vrste malih kocki [8]:

- središnje (ima ih 6),
- bridne (ima ih 12) i
- vršne (ima ih 8).

Svaka strana kocke podijeljena je na 9 sukladnih kvadrata, točnije, kocka se sastoji od 27 jednakih pomičnih kockica koje su povezane. 26 kockica se nalazi na površini kocke, a srednja kockica se ne vidi, ali i ne postoji. Centralna kockica svake strane je mehanizam koji omogućuje rotaciju određenih dijelova kocke. Jezgru kocke čine tri osi koje se presijecaju i drže na mjestu 6 centralnih kockica, tj. drže Rubikovu kocku na okupu. Preostale površinske kockice nisu u matematičkom smislu kockice jer su iznutra izdubljene. Sve su uklopljene na odgovarajuća mjesta tako da tijelo ima izgled kocke.



Slika 2. Izgled strukture [3]

Položaj malih kocki može se promijeniti na dva načina: tako da se rastavi kocka i ponovno sastavi ili tako da se napravi potez na kocki. Prilikom rastavljanja i ponovnog sastavljanja kocke, vjerojatnost da će se ona nakon toga moći složiti potezima iznosi samo 1 ili tek nešto više od 8 posto. Objašnjenje ove tvrdnje može se pročitati u idućem poglavlju. Ako se Rubikova kocka ne rastavlja već je izmiješana samo potezima, ona se uvijek može složiti (očigledno, jer ako se zapamte potezi koji su se izveli, izvodenjem istih poteza unatrag, kocka bi se vraćala se u početno stanje) [1].

2.3. RAZLIČITE VERZIJE RUBIKOVE KOCKE

Od same pojave Rubikove kocke do danas pojavile su se brojne varijacije koje su u osnovi slične Rubikovoj kocki [2]:

- Rubik360

  Rubik 360 predstavljen je u veljači 2009. godine. Sastoji se od 3 prozirne sfere u kojima se nalazi 6 šarenih kuglica. Cilj je da se šarene kuglice iz unutarnje sfere kroz središnju sferu, koja ima samo dvije rupice, premjeste u utore iste boje na vanjskoj sferi, pritom da su utor i kuglica iste boje. Rubik 360 nije moguće ras-taviti pa složiti u željeni položaj te ima samo jedno rješenje.

Slika 3. Prikaz Rubik360 [16]

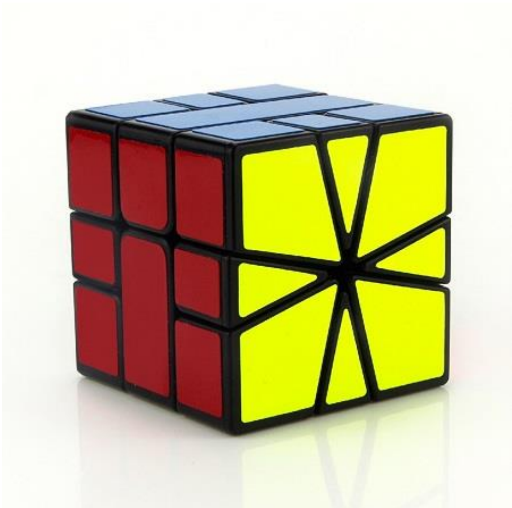
- Sudokocka

  Sudokocka je varijacija Rubikove 3x3x3 kocke. Sve strane kocke su iste boje i sadrže brojeve od 1 do 9. Slaganje ove kocke teže je od Rubikove kocke jer svaki broj mora biti na točno odgovarajućoj poziciji, a centralni broj mora također biti u odgovarajućoj orijentaciji. Kod Sudokocke postoji više od jednog rješenja.

Slika 4. Prikaz Sudokocke [3]

SquareOne

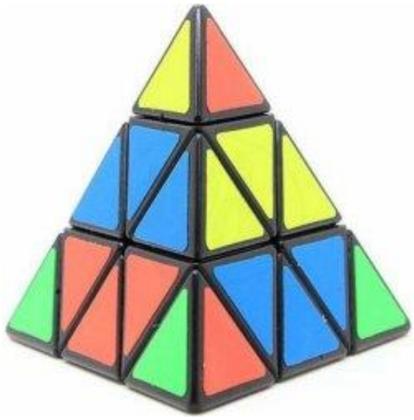
Square One je varijacija originalne Rubikove kocke koja zakretanjem daje tijelo koje nema oblik kocke. Sastoji se od tri sloja. Gornji i donji sloj podijeljeni su kao pita u 8 dijelova: 4 kutna koja oblikom podsjećaju na zmaja i 4 rubna dijela u obliku trokuta. Srednji sloj podijeljen je u 2 dijela duž neke linije jednog od preostala dva sloja. Svaki se sloj može slobodno zakretati.



Slika 5. Prikaz Square One kocke[11]

- Pyraminx

  Pyraminx je slagalica u obliku tetraedra. Svaka je strana obojena različitom bojom, te je podijeljena na 9 trokuta koji su razdijeljeni u 3 sloja: prvi sloj sadrži jedan trokut, drugi sloj sadrži tri trokuta, a treći sloj sadrži 5 trokuta. Cilj slagalice je vratiti strane tetraedra u originalni položaj.



Slika 6. Prikaz Pyraminx kocke [12]

- Oktogonalna prizma

  Oktogonalna prizma mehanički je identična Rubikovoj kocki. No, vertikalni kutni stupci bojom se ne podudaraju s vertikalnim stupcima koji čine lice. Zbog toga se kutni stupci mogu smjestiti u bilo koji kut. To olakšava slaganje, no neke kombinacije stupaca ne mogu se dobiti legalnim potezima.

Slika 7. Prikaz Oktogonalne prizme [13]

- Magična kugla

  Magična kugla poznata je i kao Rubikova sfera. Mehanički je identična 3×3×3×3 Rubikovoj kocki u operacijama i rješenju. No, puno ju je teže uhvatiti i zakretati njezine dijelove od standardne Rubikove kocke.

Slika 8. Prikaz Magične kugle [14]

- Oblo

  Oblo je trodimenzionalna obla slagalica koju je izumio zagrepčanin Marko Pavlović. Sastoji se od vanjskog dijela koji je u jednom komadu u koji se slažu drugi dijelovi koji su obojani u 4 boje. Oblo je izvrsna didaktička igračka za djecu predškolskog uzrasta.

Slika 9. Prikaz Oblo slagalice [15]

Opisano je nekoliko slagalica koje su nastale na temelju Rubikove kocke. Ostale varijacije koje nisu nabrojene su: Equator slagalica, Skewb, Megaminx, Rainbow cube, Picture cube, Aleksandrova zvijezda, Rubikova zmija i mnoge druge.

2.4. IZGLED KOCKE

Rubikova kocka ima 6 obojenih strana, 26 kockica i 54 malih kvadrata. Razlikuju se rubne, kutne i centralne kockice. 8 kutnih kockica mogu se medusobno izmjenjivati, ali nikad ne mogu zauzeti mjesto rubne kockice. Također, 12 rubnih kockica ne mogu dospjeti na ugao kocke. Kako bi se izračunao broj konfiguracija kocke, treba izračunati broj permutacija kutnih i rubnih kockica [8].

8 kutnih kockica mogu se rasporediti na 8! = 40320 načina. Svaka kutna kockica ima tri orijentacije (boje) pa se prethodni broj mora pomnožiti s 3^8. Kada je kocka gotovo složena, broj mogućih poteza se smanjuje. Kad je na odgovarajuće mjesto postavljena predzadnja kockica, zadnja ima samo jednu orijentaciju pa se 3^8 mora podijeliti s 3, što daje $3^7 = 2187$. Slijedi da je ukupan broj rasporeda kutnih kockica $40320 \times 2187 = 88, 179, 840$ [1].

12 rubnih kockica mogu se rasporediti na 12! = 479, 001, 600 načina. Kad je postavljena treća odozada rubna kockica, preostale dvije mogu se raspodijeliti samo na jedan način pa prethodni broj treba podijeliti s 2 (parnost permutacija rubnih kockica mora biti jednak parnosti permutacija kutnih kockica), što daje 239, 500, 800 načina. Svaka rubna kockica ima dvije orijentacije (boje), pa novo dobiveni broj treba pomnožiti s 2^{12}. Taj broj se također mora prilagoditi jer zadnja rubna kockica ima fiksan položaj.

Dakle, 2^{12} treba podijeliti s 2, što daje $2^{11} = 2048$. Ukupan broj rasporeda rubnih kockica je

$$239, 500, 800 \times 2048 = 490, 497, 638, 400.$$

Ovo daje 43 trilijuna konfiguracija Rubikove kocke, tj.

$$88, 179, 840 \times 490, 497, 638, 400 = 43, 252, 003, 274, 489, 856, 000$$ [2].

2.5. POTEZI NA KOCKI

Osnovnih poteza na Rubikovoj kocki ima 7. Radi lakšeg razvoja teorije, važno je uvesti oznake osnovnih poteza. Oznake 6 osnovnih poteza odgovaraju oznakama za određene strane kocke. Oznake su sljedeće [2]:

- F = okret prednje strane kocke za pravi kut u smjeru kazaljki na satu.

- B = okret stražnje strane kocke za pravi kut u smjeru kazaljki na satu.
- U = okret gornje strane kocke za pravi kut u smjeru kazaljki na satu.
- D = okret donje strane kocke za pravi kut u smjeru kazaljki na satu.
- R = okret desne strane kocke za pravi kut u smjeru kazaljki na satu.
- L = okret lijeve strane kocke za pravi kut u smjeru kazaljki na satu.

2.6. NATJECANJA

U slaganju Rubikove kocke održavaju se mnogobrojna natjecanja, a cilj je složiti Rubikovu kocku u što kraćem vremenu. Od 2003. godine sve je veći broj nacionalnih i medunarodnih prvenstva u brzom slaganju kocke, a čak ih je 33 održano 2006. godine. Svjetska udruga Rubikove kocke organizira natjecanja u slaganju Rubikove kocke jednom rukom ili nogom. Također, organiziraju se natjecanja gdje se Rubikova kocka slaže ispod vode u "jednom dahu" ili pak vezanih očiju (natjecatelj promatra kocku, planira način kako složiti kocku, a zatim na temelju zapamćenih koraka vezanih očiju slaže kocku). Prvo natjecanje održano je 13. ožujka 1981. godine u Minhenu, a organizirala ga je Guinnessova knjiga svjetskih rekorda. Pobjednik tog natjecanja bio je Njemac Jury Froeschl kojemu je bilo potrebno 38 sekundi da složi kocku. Prvo svjetsko natjecanje održano je 5. lipnja 1982. godine u Budimpešti. Kocka je bila izmješana kompjuterski [2].

Slika 10. Prikaz natjecanja [3]

Od 19 natjecatelja, najbrže ju je složio šesnaestgodišnji Minh Thai, vijetnamski učenik iz Los Angelesa. Potrebno mu je bilo 22.95 sekundi. Od 2003. godine pobjednik natjecanja se određuje u dvije kategorije. U prvoj kategoriji uzima se prosječno vrijeme najboljih tri od pet pokušaja, a u drugoj najbolje vrijeme jednog pokušaja. U ožujku 2007. godine Francuz Thibaut Jacquinot je postao prvi natjecatelj kojemu je bilo potrebno manje od 10 sekundi da složi kocku. Složio je kocku u 9.86 sekundi. Trenutno najbolje vrijeme u jednom pokušaju slaganja Rubikove kocke postavio je Australac Feliks Zemdegs 7. ožujka 2011. [9].

Koristio je metodu Jessice Friedrich i složio je kocku za nevjerojatnih 5.66 sekunde. Šesnaestogodišnji Feliks također "drži" rekord u prosječnom vremenu slaganja kocke koji trenutno iznosi 7.64 sekunde. 17. ožujka 2010. godine, 134 učenika Osnovne škole Dr. Challoner's u Amershamu u Engleskoj su oborili svjetski Guinessov rekord za najveći broj ljudi koji su složili Rubikovu kocku u 12 minuta. Prethodni rekord je ostvaren u prosincu 2008. godine u SAD-u kada je sudjelovalo 96 natjecatelja. Cak se i znanstvenici natječu tko će izraditi najboljeg robota koji će najbrže složiti Rubikovu kocku. Robota Rubya su osmislili studenti australskog Sveučilišta Swinburne. Ruby uz pomoć sofisticiranog softvera rješava kompleksne algoritme i pronalazi brzinsko rješenje za Rubikovu kocku. Prije nego li počne slagati kocku, on skenira početni položaj kocke kako bi "znao" koji razultat treba dobiti. Super pametnom i brzom androidu je bile potrebno 10.18 sekundi da složi kocku. Prethodni rekord je postavio robot Cubinator kojemu je bilo potrebno 18.2 sekunde [9].

3. GRUPE I KOMBINATORIKA RUBIKOVE KOCKE

U ovom dijelu rada definirat će se kombinatorika rubikove kocke.

3.1. BROJ MOGUĆNOSTI KOCKE

Kada se govori o kombinatorici i Rubikovoj kocki, najčešće se misli na broj mogućih stanja Rubikove kocke. Pri tome je jako važno uzimaju li se u obzir samo stanja koja se mogu dobiti potezima na Rubikovoj kocki ili i stanja koja se mogu dobiti rastavljanjem i ponovnim sastavljanjem kocke. Za početak ćemo izračunati broj svih stanja Rubikove kocke (uključujući ona koja se mogu dobiti samo rastavljanjem i ponovnim sastavljanjem kocke). Važno je razlikovati vršne i bridne kockice.Pitanje je na koliko načina se mogu rasporediti vršne, odnosno bridne kockice. Odgovor na to pitanje se nalazi u poznavanju pojma permutacije skupa kao i u pravilu produkta.

Primjer [2]:

Neka je n ∈ S i neka je dan n-člani skup S. Permutacija skupa S je svaka uredena n-torka članova skupa S .Na primjer skup S = 1, 2, 3. Jedna od permutacija skupa S je uređena trojka (3,2,1). Idući teorem govori o broju permutacija na zadanom skupu.

> Broj permutacija n-članog skupa je n!.
> Broj permutacija 3-članog skupa je 3! = 6. Primjerice, za 3-člani skup {1, 2, 3}, sve permutacije su sljedeće: (1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1).

Sada je jasno da vršne kockice na Rubikovoj kocki, kojih ima 8, se mogu rasporediti na 8! načina, dok se bridne, kojih ima 12, mogu rasporediti na 12! načina. Treba uočiti da se središnje kockice ne mogu premještati jer su fiksne. Nadalje, vršne kockice se mogu okrenuti na 3 načina, a bridne na 2.

3.2. POTEZ – „BOŽJI BROJ“

Još jedan zanimljivi kombinatorički rezultat vezan je uz pojam ”Božji broj. ”Božji broj” iznosi 20, a njegovo značnje leži u iskazu sljedećeg teorema. Najmanji broj poteza potreban da se složi Rubikova kocka (bez obzira na početno stanje) iznosi 20. Vrlo je važno napomenuti da se u ovom poglavlju pod pojmom potez na Rubikovoj kocki podrazumijeva okret jedne od strana kocki. Tako je primjerice B jedan potez, ali isto tako je i B2 jedan potez. Također, zbog jednostavnosti, u ovom će se poglavlju naglašavati kada je riječ o općem potezu na Rubikovoj kocki, točnije, opći potez koji nije osnovni potez (niti je potez u smislu gornje napomene) nazivat će se niz poteza [2].

Zanimljivo je što iako postoji približno 43 bilijardi mogućih stanja kocke, dovoljno je samo 20 poteza da se iz bilo kojeg stanja složi, tj. dovede u početno stanje. Međutim, to ne zna napraviti niti jedan čovjek te se broj 20 zapravo odnosi na najmanji broj koji je računalu (ili ”Bogu”) dovoljan da složi kocku. Od tu i dolazi naziv ”Božji broj”.

Treba istaknuti da to ne znači da je za svako stanje kocke to istih 20 poteza. Nameće se jedno vrlo zanimljivo pitanje — kako je moguće znati da ”Božji broj” iznosi upravo 20, točnije — kako glasi dokaz prethodnog teorema? Odgovor na to pitanje može se potražiti u samoj povijesti otkrivanja ”Božjeg broja”, odnosno činjenice da on iznosi 20.

Osobe koje su zadužene za dolaženje do slutnje da ”Božji broj” iznosi 20, nisu “odjednom” došle do tog broja, već su mu postepeno “konvergirale”. Prvi korak prema slutnji da je “Božji broj” jednak 20 dogodio se 1980. godine, kada se zaključilo da je taj broj zasigurno veći ili jednak 18. Do tog zaključka se došlo na temelju promatranja svih bitno različitih nizova poteza na Rubikovoj kocki koji se sastoje od 17 ili manje poteza. Ustanovilo se da takvih nizova ima manje nego svih mogućih stanja kocke. Iz toga direktno slijedi da je ”Božji broj” strogo veći od 17, dakle zasigurno je veći ili jednak 18 [9].

Logični korak dalje prema otkrivanju ”Božjeg broja” je svakako, otkrivanje gornje granice za taj broj. Već godinu dana nakon otkrića da je ”Božji broj” veći ili jednak broju 18, Morwen Thistlethwaite dokazuje da je taj broj zasigurno manji ili jednak 52. Zatim, 1995. godine Michael Reid dokazuje da je ”Božji broj” manji ili jednak 29. Iste godine, on dokazuje da ”Božji broj” iznosi najmanje 20. Dakle, u tom trenutku je poznato (i dokazano) da se ”Božji broj” nalazi izmedu brojeva 20 i 29. Konačno, 2010. godine Tomas Rokicki, Herbert Kociemba, Morley Davidson i John Dethridge dokazuju da je ”Božji broj” ili manji ili jednak 20, dakle iznosi točno 20.

Treba napomenuti da činjenica da ”Božji broj” iznosi točno 20 ne znači da je za svako stanje kocke potrebno točno 20 poteza da bi se došlo do rješenja, već to znači da je potrebno 20 ili manje pokreta (očito, jer ako se primjerice zamisli stanje kocke koje je nastalo nakon poteza R na već složenoj kocki, zna se da je dovoljan samo jedan potez za vraćanje u složeno stanje, tj. potez R 1, dakle, svakako je u tom slučaju potrebno manje od 20 poteza).

Mnogi ljudi su se bavili otkrivanjem božanskog algoritma za Rubikovu kocku. Taj problem i danas pobuđuje veliki interes kod matematičara i obožavatelja Rubikove kocke. Postoje dva puta za traženje božanskog algoritma i božanskog broja [9]:

- Osnovni potezi su okreti bilo koje strane za 90° ili za 180° . Stoga, u ovom slučaju, božanski broj je dijametar Cayleyevog grafa grupe G koja je generirana sa skupom hL, R, U, D, F, B, L2 , R2 , U2 , D2 , F2 , B2 i. Takva metrika u kojoj je i okret za 180° osnovni potez kraće će se zvati i pisati HTM (eng. *half-turn metric*).
- Osnovni potezi su okreti bilo koje strane za 90◦ . Božanski broj je dijametar Cayleyevog grafa grupe G koja je generirana sa skupom hL, R, U, D, F, Bi. Takva metrika će se zvati QTM (eng. *quarter-turn metric*).

Potrebno je najmanje 18 poteza kako bi se složila Rubikova kocka i taj broj označava donju granicu. Pitanje je, koliko je potrebno najviše poteza, tj. koliko iznosi gornja granica? Smatra se da je najteži slučaj za rješavanje Rubikove kocke kad se sve kutne i rubne kockice na Rubikovoj kocki nalaze u pravilnom položaju, a rubne kockice nisu pravilno orijentirane. Taj slučaj, kada je položaj kocke najdalji od početnog položaja, je nazvan "superflip". 1992. g. Dik T. Winter je pokazao da se taj slučaj može riješiti u 20 osnovnih poteza u HTM, a Michael Reid i Jerry Bryan su 1995. g. pokazali da je potrebno 24 osnovnih poteza u QTM [10].

Međutim, 1998. g. Reid je otkrio položaj kojemu treba 26 osnovnih poteza u QTM kako bi se vratio u početni položaj, taj položaj je nazvan "superflip sastavljen sa 4 točkice". Prve gornje granice su temeljene na "ljudskim" algoritmima. Smatralo se da božanski broj iznosi oko 100. No, takav pristup nije bio zadovoljavajući, te su se tražili novi načini i počela su se koristiti računala. Kombinirajući najgore moguće slučajeve, Morwen Thistlethwaite je otkrio da gornja granica iznosi oko 52.

Douglas Hofstadter je detaljno opisao Thistlethwaiteov algoritam u časopisu "Scientific

American", 1981. g. Njemački profesor matematike Herbert Kociemba je 1992. g. poboljšao Thistlethwaiteov algoritam. Pomoću tog algoritma, u većini slučaja je bilo potrebno manje od 21 poteza da bi se složila Rubikova kocka. Michael Reid je 1995. godine dokazao da se svaka konfiguracija može riješiti u najviše 28 ili 29 osnovnih poteza u HTM i u 42 osnovna poteza u QTM. 1997. g. Richard Korf je objavio svoj algoritam. Korfov algoritam daje optimalno rješenje, ali ne analizira najgore slučajeve i ne zna se koliko osnovnih poteza je potrebno ovom algoritmu. Za daljnja poboljšanja, veliku ulogu je imao Silviu Radu koji je svojom metodom pokazao da se svaka konfiguracija može riješiti u 27 osnovnih poteza u HTM i 35 osnovnih poteza u QTM. No, čak ni super računala nisu mogla istražiti sve moguće konfiguracije kako bi se pronašao najbolji put do rješenja [10].

Profesor Gene Cooperman i njegov student Daniel Kunkle sa Sveučilišta Northeastern razvili su inteligentnu matematičku i računalnu strategiju kako bi računalu olakšali zadatak. Na primjer, ako je jedna strana u istoj boji, zadatak je riješen. Također, dvije konfiguracije smatrane su identičnima ako su dvije boje samo medusobno zamjenjene. Na temelju toga, broj konfiguracija je smanjen na nešto više od 1 × 1018. Nadalje, otkrili su da se 15000 konfiguracija može riješiti okretanjem za pola kruga bez okreta za četvrtinu kruga te da je za njihovo rješenje potrebno 13 ili manje poteza. Te konfiguracije nazvali su "posebne konfiguracije". Potom su istražili kako bilo koju konfiguraciju pretvoriti u "posebnu konfiguraciju". U proces računanja uključili su i super računalo kojemu su omogućili da izravno dolazi do podataka preciznim pohranjivanjem na tvrdom disku bez pretraživanja [10].

To ga je dodatno ubrzalo kao i korištenje njihovih strategija. Nakon 63 sata rada, računalo je došlo do zaključka da je potrebno izvesti najviše 16 osnovnih poteza da bi se bilo koja konfiguracija složila u posebnu. Na temelju tog podatka, došli su do zaključka da je 29 osnovnih poteza dovoljno za rješavanje svih konfiguracija Rubikove kocke. Budući da to nije bilo dovoljno za ostvarenje rekorda, dalje su istraživali i ustvrdili su da se svaka konfiguracija može riješiti u najviše 26 osnovnih poteza u HTM. Sve te rezultate, Gene Cooperman i Daniel Kunkle su predstavili 29. srpnja 2007. g. u Waterloou u Ontariju.

Kalifornijski programer Tomas Rokicki je 2008. g. dokazao da je dovoljno najviše 25 osnovnih poteza za rješavanje Rubikove kocke, a iste godine je objavio da ima dokaz da su dovoljna 22 osnovna poteza u HTM. Godinu dana kasnije dao je dokaz da je taj broj jednak 29 u QTM. Metode za traženje božanskog broja lakše se primjenjuju u HTM nego u QTM. Konačno, smatra se, ali nije još sasvim dokazano da božanski broj u QTM iznosi 26. Općenito vrijedi da se n×n×n Rubikova kocka može optimalno riješiti u Θ(n 2/log(n)) osnovnih poteza. Godine 2010. Tomas Rokicki, Herbert Kociemba, Morley Davidson i John Dethridge su objavili trenutačni zadnji dokaz u otkrivanju božanskog broja. Uz pomoć računala pokazali su da se sve konfiguracije Rubikove kocke mogu riješiti sa maksimalno 20 osnovnih poteza u HTM [10].

Istraživači su došli do rezultata tako da su problem sveli na probleme koji su bili dovoljno mali kako bi stali u memoriju modernog 29 računala te se na takav način problem brže rješavao. Koristeći znanje o simetrijama te program kojeg su sami napisali, svaki problem je uspješno rješen te su na kraju došli do rezultata. Istraživači tvrde: "Trebalo je 15 godina nakon predstavljanja kocke da se nađe raspored kockica iz kojeg se zagonetka može riješiti u 20 osnovnih poteza. Primjereno je da se 15 godina nakon toga može dokazati da se kockice mogu posložiti u 20 osnovnih poteza iz svih pozicija". No, interes za božanski algoritam i božanski broj sigurno neće prestati. Taj problem će se i dalje istraživati i tko zna što donosi budućnost.

Postoji još jedan problem vezan za graf grupe Rubikove kocke koji glasi: je li Cayley graf za grupu Rubikove kocke Hamiltonov graf - Hamiltonov ciklus na grafu G je ciklus koji sadrži sve vrhove od G. Graf koji ima Hamiltonov ciklus zove se Hamiltonov graf. Hamiltonov ciklus je slijed bridova koji formiraju put u grafu tako da se kroz svaki vrh prođe točno jedanput. Tada, problem grupe Rubikove kocke glasi: Neka je G grupa Rubikove kocke. Ima li Cayleyev graf od G Hamiltonov ciklus, tj. može li se svaka konfiguracija Rubikove kocke "posjetiti" točno jedanput koristeći osnovne poteze R, L, U, D, F, B? To je poseban slučaj općenitog neriješenog problema: za proizvoljnu permutacijsku grupu sa danim skupom generatora, je li njezin Cayleyev graf Hamiltonov? No, još se ne zna efikasni algoritam za rješavanje tog problema [4].

3.3. GRUPE I PODGRUPE

Rubikova kocka se sastoji od 27 minijaturnih kockica, od kojih su 26 vidljivih, a kockica koja je u središtu zapravo ni ne postoji. Kako bi se lakše proučavala, notacija Rubikove kocke se neće vezati za boje, već će se koristiti imena i slova. Na kocki se nalazi 8 kutnih kockica koje imaju 3 vidljive strane, 12 rubnih kockica koje imaju dvije vidljive strane te 6 središnjih kockica koje imaju jednu vidljivu stranu.

Uobičajna je notacija koja je potekla od Davida Singmastera, pa se prema njemu naziva Singmasterova notacija. On pretpostavlja da se na početku odabralo koja strana će biti gore, naprijed i desno te da se to neće mijenjati (to se postiže tako da se zapamte boje središta prednje, gornje i desne strane) [4].

3.3.1. Grupe

Osnovni potez na Rubikovoj kocki je rotacija jedne strane za pravi kut u smjeru kazaljke na satu. Singmasterova notacija za 6 osnovnih poteza glasi [4]:

- F (eng. *Front*): rotacija prednje strane,
- B (eng. *Back*): rotacija stražnje strane,
- U (eng. *Up*): rotacija gornje strane,
- D (eng. *Down*): rotacija donje strane,
- L (eng. *Left*): rotacija lijeve strane,
- R (eng. *Right*): rotacija desne strane.

Slijed osnovnih poteza čini potez. Na primjer, LRRRD znači redom okrenuti lijevu, triput zaredom desnu i jednom donju stranu kocke za pravi kut u smjeru kazaljke na satu.

Prije daljnjeg razmatranja Rubikove kocke, treba se prisjetiti što je to grupa. Neka je G neprazni skup. Svako preslikavanje: $G \times G \rightarrow G$ sa Kartezijevog produkta skupa G sa samim sobom u skup G zove se binarna operacija na skupu G.

Grupa je algebarska struktura koje se sastoji od nepraznog skupa G i binarne operacije $*$ koja je definirana za svaka dva elementa iz G,

$(a, b) \rightarrow a * b$ sa $G \times G$ u G, i ima sljedeća svojstva [4]:

- Zatvorenost: $\forall a, b \in G, \quad a * b \in G$.
- Asocijativnost: $\forall a, b, c \in G, \quad (a * b) * c = a * (b * c)$.
- Neutralni element: $\exists e \in G$ tako da je $a * e = e * a = a$, $\forall a \in G$ (neutralni element je jedinstven, te se ponekad označava i s 1).

- Inverzni element: $\forall a \in G\ \exists a' \in G$ tako da je $a * aJ = a' * a = e$. Prema tomu, grupa je par $(G, *)$. Grupa $(G, *)$ je komutativna ili Abelova ako je $a * b = b * a$, $\forall a,b \in G$.

Grupa se naziva konačnom ukoliko je skup G konačan. Broj elemenata neke konačne grupe G se označava s G ili red (G) i zove se red grupe G. Tada, skup svih mogućih poteza na Rubikovoj kocki se može označiti s G, pritom se dva poteza smatraju istim ako daju isti rezultat (npr. okret desne strane je isto kao i okret desne strane u suprotnom smjeru tri puta). Binarna operacija se može definirati na idući način: ako su X i Y dva poteza, tada X Y označava potez gdje se prvo izvršio potez X pa zatim potez Y. Par (G) čini grupu [6].

Treba provjeriti sva svojstva kako bi se pokazalo da je skup $(G, *)$ grupa [6]:

- Zatvorenost: jedan potez, nakon kojeg slijedi drugi potez ponovno daje potez koji je element skupa G.
- Asocijativnost: u ovom slučaju radi se operaciji koja je kompozicija funkcija, a kompozicija funkcija je uvijek asocijativna.
- Neutralni element: potez koji ništa ne mijenja na kocki.
- Inverzni element: svaki potez se može izvesti unatrag i time ga poništiti (nakon svakog poteza nekim potezom iz skupa se može vratiti kocka u početno stanje).

Stoga, skup svih poteza Rubikove kocke na kojem je definirana operacija uzastopnog izvodenja elemenata tog skupa označeno nadopisivanjem, je grupa. No, grupa Rubikove kocke $(G, *)$ nije Abelova, ne zadovoljava svojstvo komutativnosti. To se lagano može primjetiti na kocki: kocka različito izgleda nakon DR, nego nakon RD.

Nekomutativnost grupe Rubikove kocke je vrlo važno svojstvo. Kad bi svaka dva poteza komutirala rješavanje kocke bi bilo trivijalno. Treba se samo prebrojati koliko puta su izvedeni potezi na pojedinim stranama i svaku stranu okrenuti do sljedećeg višekratnika od 4, jer je 4 red grupe čiji se elementi sastoje od kombinacija jednog od osnovnih poteza. Na primjer, ako je 5 puta izveden osnovni potez R i 2 puta osnovni potez D, da vrijedi komutativnost, kocka bi se vratila u svoj početni položaj ako se izvede 3 puta osnovni potez R i 2 puta osnovni potez D [6].

Izvođenje poteza je komutativno samo ako se radi o potezima sa samo jednom stranom.

Red grupe Rubikove kocke je broj koji označava koliko ima različitih konfiguracija kocke koje se mogu dobiti primjenom osnovnih poteza, a taj broj iznosi 4.3×10^{19}.

Binarna operacija $*$ često se izostavlja, pa se tako umjesto $g * h$ može pisati samo gh. Stoga, grupa $(G, *)$ se može zapisati samo sa G i označava grupu na kojoj je definirana navedena binarna operacija.

3.3.2. Podgrupe

Kako bi se pokušala razumjeti grupa Rubikove kocke čiji je red ogroman, treba se krenuti od jednostavnije situacije: razmatranja njezinih podgrupa. Zbog preglednosti i manjeg broja slučajeva pogodnije su za objašnjenje i ilustriranje različitih pojmova.

Primjer [6]:

Već spomenuti četveročlani skup C_4 = X^0, X^1, X^2, X^3 , gdje je X jedan od mogućih 6 osnovnih poteza (R, L, U, D, F, B) je podgrupa grupe Rubikove kocke. To su najjednostavnije podgrupe. Njihov red iznosi 4 jer broj elemenata u skupu je 4. Grupa C4 ima i jedno dodatno svojstvo: nije bitan redoslijed izvodenja poteza (isti je rezultat nakon okreta jedne strane za 90°, pa za 180° ili obrnuto), tj. vrijedi svojstvo komutativnosti. LR je podgrupa (tj. svake dvije suprotne strane čine podgrupu): to je također trivijalna grupa jer okreti dviju suprotnih strana su nezavisni i ima 16 elemenata.

R^2U^2 je podgrupa: ta se grupa sastoji od svih poteza koji se mogu dobiti izvodenjem okreta prvo desne pa gornje strane za 180° u smjeru kazaljke na satu. Ponavljajući R^2U^2 6 puta zaredom, kocka se vraća u svoj početni položaj.

Za rješavanje Rubikove kocke veliku ulogu imaju klase (eng. *coset*) koje se definiraju na sljedeći način [1]:

Definicija 3.7 Neka je H podskup grupe G, tada za $g \in G$ vrijedi:

- $gH = \{gh : h \in H\}$ je lijeva klasa podgrupe H u grupi G,
- $Hg = \{hg : h \in H\}$ je desna klasa podgrupe H u grupi G.

3.4. GENERATORI GRUPA

Definicija 3.8 Neka je $S \subset G$. Sa $\langle S \rangle$ označava najmanja podgrupa od G koja sadrži S. Definicija 3.9 Neka je $S \subseteq G$ podskup grupe G. S generira G (S je skup generatora od G) ako $G = \langle S \rangle$, tj. svaki element grupe G se može zapisati kao konačan produkt elemenata iz S i njezinih inverza (inverzi nisu nužni ako se radi o konačnoj grupi).

Primjer [6]:

- Svaki element grupe G se može zapisati kao konačan slijed osnovnih poteza Rubikove kocke, stoga je G = (D, U, L, R, F, B).
- Svaki element grupe C_4 se može zapisati uz pomoć osnovnog poteza X, stoga za svaki X = D, U, L, R, F, B, vrijedi C_4 = (X).

Grupa G je ciklička ako je generirana jednim elementom, tj. ako postoji $g \in G$ sa svojstvom da je G = (g). Element g se zove generator grupe. Grupa C_4 je ciklička grupa. Njezin generator je osnovni potez X.

Sljedeća propozicija je veoma korisna za Rubikovu kocku jer govori da je umjesto svojstava svih mogućih 1020 poteza, dovoljno razumjeti svojstva 6 osnovnih poteza Rubikove kocke.

Neka je $S \subseteq G$ podskup konačne grupe G. Neka su zadovoljena sljedeća dva uvjeta [1]:

- Svaki element iz S i inverz svakog elementa iz S zadovoljavaju svojstvo P.
- Ako $g \in G$ i $h \in G$ zadovoljavaju svojstvo P, tada i gh zadovoljava svojstvo P. Tada, svaki element iz $\langle S \rangle$ zadovoljava svojstvo P.

Dokaz: Svaki element iz $\langle S \rangle$ se može zapisati u obliku $s_1^{\pm 1} \bullet s_2^{\pm 1} \bullet \bullet \bullet s_n^{\pm 1}$, gdje je

$n \in N$, a s_i, $i = 1, \dots, n$ elementi iz S. Dokaz se provodi indukcijom po n:

- Baza indukcije: za n=1, $s_1^{\pm 1}$ zadovoljava svojstvo P
- Induktivna pretpostavka: pretpostavlja se da $s_1^{\pm 1} \bullet \bullet \bullet s_{n-1}^{\pm 1}$ zadovoljava svojstvo P
- 3. Korak indukcije: uz pomoć induktivne pretpostavke vrijedi: produkt $s_n^{\pm 1}$ je produkt dvaju elemenata koji zadovoljavaju svojstvo P, pa zbog toga i on također zadovoljava svojstvo P.

Kako se radi o konačnoj grupi, poput grupe Rubikove kocke, treba primjetit da se iz uvjeta 1. prethodne propozicije može izbaciti dio da inverzi elemenata iz S zadavoljavaju svojstvo P. Zaista, svaki element $s \in S$ je konačnog reda (jer je red elemenata manji ili jednak redu grupe) te postoji $n \in N$ takav da je $s^n = e$.

Djelovanje grupe je još jedan u nizu matematičkih pojmova koji se na jednostavan način može razumjeti uz pomoć Rubikove kocke. (Desno) djelovanje grupe grupe $(G, *)$ na neprazni skup A je preslikavanje $A \times G \to A$ koje zadovoljava sljedeća svojstva [1]:

- $(a \bullet g1) \bullet g2 = a \bullet (g1 * g2)\ \forall g1, g2 \in G, a \in A$
- $a \bullet e = a\ \forall a \in A$ (e je neutralni element grupe G).

Neka je G grupa Rubikove kocke i jedna konfiguracija Rubikove kocke. Tada vrijedi [1]:

- Nakon što se primijeni potez M_1, dobije se nova konfiguracija Rubikove kocke $C \bullet M_1$. Nakon primjene poteza M_2, konfiguracija postaje $(C \bullet M_1) \bullet M_2$. Znači, na početnu konfiguraciju primijenjen je potez M_1M_2. Drugi način pisanja nove konfiguracije je $C\bullet(M_1M_2)$. Stoga je $(C\bullet M_1)\bullet M_2 = C\bullet(M_1M_2)$, za sve konfiguracije C i poteze $M_1M_2 \in G$.
- Ako se ne primijeni niti jedan potez (neutralni element $e \in G$), tada se konfiguracija ne mijenja, tj. $C \bullet e = C$.

Znači, elementi grupe Rubikove kocke (elementi su potezi na Rubikovoj kocki) djeluju na elemente nekog skupa (skup konfiguracija Rubikove kocke). Ako postoji djelovanje grupe G na skup A, onda se kaže ”G djeluje na A”. Grupa G djeluje na skup svih konfiguracija Rubikove kocke (skup sadrži i konfiguracije koje nisu valjane). Neka G djeluje na skup A. Orbita od $a \in A$ je skup $\{a \bullet g : g \in G\}$. G djeluje na skup svih konfiguracija Rubikove kocke. Orbita početne konfiguracije je skup svih valjanih konfiguracija Rubikove kocke.

4. METODOLOGIJA I KONFIGURACIJA KOCKE

U ovom dijelu rada definirat će se metodologija i konfiguracije kocke, kako bi se dao što bolji uvid u samu problematiku rubikove kocke.

4.1. KONFIGURACIJA KOCKE

Rubikova kocka je “jednostavna” slagalica iza koje stoji “ozbiljna” matematika. No, glavni cilj ove slagalice je iz bilo koje konfiguracije, skupom poteza se vratiti u početni položaj, tj. u položaj gdje je svaka strana kocke u jednoj boji.

Konfiguracije Rubikove kocke odredene su sa 4 podatka [4]:

- položaj kutnih kockica
- položaj rubnih kockica
- orijentacija kutnih kockica
- orijentacija rubnih kockica.

Prvi podatak se može opisati kao preslikavanje $\sigma \in S_8$ koje premješta kutne kockice iz svog početnog položaja u neki novi položaj. Drugi podatak se može opisati kao preslikavanje $\tau \in S_{12}$ koje premješta rubne kockice u novi položaj. Za treći i četvrti podatak važna je samo pravilna notacija. Osnovna ideja je zapamtiti notaciju početne orijentacije i zapisati na koji se način notacija nove orijentacije razlikuje od notacije početne orijentacije.

Notacija orijentacija kutnih kockica se može opisati na sljedeći način: Svaka kutna kockica ima 3 moguće orijentacije koje se mogu numerirati brojevima 0, 1 i 2. Neka se Rubikova kocka nalazi u početnom položaju i neka jedna strana svakog kutnog prostora sadrži broj kao što slijedi [4]:

- 1 se nalazi na u strani ufl prostora
- 2 se nalazi na u strani urf prostora
- 3 se nalazi na u strani ubr prostora
- 4 se nalazi na u strani ulb prostora
- 5 se nalazi na d strani dbl prostora
- 6 se nalazi na d strani dlf prostora

- 7 se nalazi na d strani dfr prostora
- 8 se nalazi na d strani drb prostora.

Znači, svaki kutni prostor ima numeriranu jednu stranu. Stoga, svakoj kutnoj kockici jedna strana leži na numeriranoj strani kutnog prostora. Ta strana neka je označena s 0. Sljedeće dvije strane, gledajući u smjeru kazaljke na satu, neka su označene s 1 i 2.

Tada se na svakoj strani kutnih kockica nalazi broj. Ako se Rubikova kocka nalazi u bilo kojoj konfiguraciji, orijentacija kutnih kockica se opisuje na sljedeći način: za svaki i između 1 i 8, treba naći stranu kutnog prostora koja je označena sa i, pritom x_i označava broj koji se nalazi na strani kutne kockice koja ”živi” na toj strani kutnog prostora. Stoga, orijentacija kutnih kockica se označava sa uredenom 8-orkom $x = (x_1, . . . , x_8)$. Budući da kutna kockica koja je triput zaokrenuta ima istu orijentaciju kao i kutna kockica koja je nula puta zaokrenuta, x_i se može promatrati kao element skupa cijelih brojeva modulo 3 (element iz Z/3Z), tj. x je uređena 8-orka elemenata iz (Z/3Z) [4].

Na isti način se može opisati orijentacija rubnih kockica. Rubni prostori neka budu označeni na sljedeći način [1]:

- 1 se nalazi na u strani ub prostora
- 2 se nalazi na u strani ur prostora
- 3 se nalazi na u strani uf prostora
- 4 se nalazi na u strani ul prostora
- 5 se nalazi na b strani lb prostora
- 6 se nalazi na b strani rb prostora
- 7 se nalazi na f strani rf prostora
- 8 se nalazi na f strani lf prostora
- 9 se nalazi na d strani db prostora
- 10 se nalazi na d strani dr prostora
- 11 se nalazi na d strani df prostora
- 12 se nalazi na d strani dl prostora

Svaka rubna kockica ima stranu koja leži na numeriranoj strani rubnog prostora. Ta strana označena je s 0, a druga strana rubne kockice označena je s 1. Stoga, y_i je broj koji se nalazi na strani rubne kockice koja se nalazi na strani rubnog prostora numeriran sa i. To definira $y \in (Z/2Z)^{12}$.

No, od mogućih 5.19×10^{20} konfiguracija Rubikove kocke, nisu sve valjane. Konfiguracija Rubikove kocke je valjana ako se može dobiti slijedom poteza na kocki koja se nalazi u početnom položaju.

Sljedeći teorem daje karakterizaciju valjanih konfiguracija [1]:

Konfiguracija (σ, τ, x, y) je valjana ako i samo ako $\operatorname{sgn} \sigma = \operatorname{sgn} \tau$, $\Sigma x_i \equiv 0 \pmod 3$ i $\Sigma y_i \equiv 0 \pmod 2$.

Teorem pokazuje da od svih mogućih konfiguracija Rubikove kocke, "samo" je 1 valjana. To znači da postoji više od 4.3×10^{19} valjanih konfiguracija, što nije mali broj.

Osnovni potez R se može zapisati kao: R=(rfu rub rbd rdf)(ru rb rd rf).

Ciklus kutnih kockica se sastoji od neparnog broja transpozicija, pa preslikavanje $\sigma \in S_8$ ima predznak -1. Ciklus rubnih kockica sa sastoji od neparnog broja transpozicija, pa preslikavanje $\tau \in S_{12}$ također ima predznak 1. Orijentacija kutnih kockica je $x = (0, 1, 2, 0, 0, 0, 2, 1)$.

4.2. RUBIKOVA KOCKA U MODERNOM SVIJETU

Rubikova kocka već 30-ak godina privlači pažnju cijelog svijeta. Dobila je svoje mjesto i u engleskom rječniku, a u Muzeju moderne umjetnosti u New Yorku nalazi se stalna izložba posvećena Rubikovoj kocki. Slaganje Rubikove kocke korišteno je u mnogim filmovima i TV serijama kao način pokazivanja inteligencije glavnih likova. Stoga, Rubikova se kocka pojavljuje u filmovima Armageddon, Dude, Where's My Car?, My Name is Khan, 3 Idiots, Let the Right One In, Wall-E, Hellboy, Being John Malkovich i TV serijama The Fresh Prince of Bel-Air, Seinfeld, Doctor Who, Everybody Hates Chris, The Simpsons i mnogim drugim [1].

Rubik, nevjerojatna kocka je crtani film u kojemu je glavni lik osjetljiva Rubikova kocka, a

Rubikova kocka se pojavljuje i u glazbenom spotu pjesme Viva Forever grupe Spice Girls. Rubikova kocka se redovito pojavljuje kao motiv u umjetnosti. U New York-u se nalazi skulptura u obliku Rubikove kocke, a veliki primjerak Rubikove kocke izgraden je na Sveučilištu u Michiganu.

4.3. MEHANIKA KOCKE

Standardna Rubikova kocka mjeri 5,7 cm sa svake strane. Slagalica se sastoji od dvadeset šest jedinstvenih minijaturnih kockica, koje se nazivaju i "kockice". Svaka sadrži skriveni unutarnji nastavak koji visi za ostale kocke, omogućavajući im premještanje na različita mjesta. Međutim, središte kocke svakog od šest lica samo je jedna kocka pročelja; svih šest su pričvršćeni u jezgru mehanizma. Oni pružaju strukturu za ostale dijelove koji stoje i okreću se. Dakle, postoji dvadeset i jedan komad: jedan presjek jezgre koji od presjeka tri osi drži šest središta kvadrata na mjestu, ali i omogućuje da se okreću, i dvadeset manjih komada plastike koji se uklapaju u oblik presavijene slagalice [1].

Svaki od šest središnjih komada zakreće se odvijačem koji drži središnji dio, „trodimenzionalnim križem“. Opruga između svake glave vijka i odgovarajućeg dijela pritisne dio iznutra, tako da cjelokupni sklop ostaje cjelovit, ali se i dalje može lako upravljati. Vijak se može zategnuti ili opustiti kako bi se promijenio "osjećaj" kocke. Novije službene kocke marke Rubik imaju zakovice umjesto vijke, pa ih nije moguće podesiti.

Kocka se može rastaviti bez većih poteškoća, obično rotiranjem gornjeg sloja za 45°, a zatim povlačenjem jednog ruba kocke s druga dva sloja. Stoga je ovo jednostavan način "slaganja" kocke tako da se razbije na komade i zatim presavije u složeno stanje.

Postoji šest središnjih dijelova koji prikazuju po jedno obojeno lice, dvanaest rubnih dijelova koji prikazuju dva obojena lica, a osam kutnih dijelova koji prikazuju tri obojena lica. Svaki dio pokazuje jedinstvenu kombinaciju boja, ali nisu sve kombinacije prisutne (na primjer, ako su crvena i narančasta na suprotnim stranama kockice, ne postoji rubni dio na narančastoj i na crvenoj strani). Položaj tih kockica u odnosu jedan prema drugom može se mijenjati okretanjem vanjske trećine kocke za 90°, 180° ili 270°, ali položaj obojenih strana u odnosu na svaku drugu u stanju dovršene slagalice ne može se mijenjati: to se fiksira iz relativnog položaja središta trgovi. Međutim, postoje i kocke s alternativnim rasporedom boja; na primjer, sa žutom naspram zelene, plavom i bijelom, crvena i narančasta ostaju jedna nasuprot drugoj [1].

Douglas Hofstadter objavio je Scientific American u srpnju 1982. godine, navodeći da se kocke mogu obojiti na takav način da su kutovi i rubovi naglašeni, umjesto lica koja se inače uzimaju kao standard pri bojenju; ali niti jedno od ovih alternativnih bojanja nikada nije postalo popularno.

4.4. PROCES SLAGANJA KOCKE

Proces je objašnjen kroz 12 etapa [8]:

1. korak

   Staviti kocku pred sebe na stol i uvjeriti se koja je strana kocke prednja, gornja, lijeva, desna, donja i stražnja.

2. korak

   Srednja kockica svake strane je ona koja se nalazi u sredini. Srednja kockica određuje kakve boje treba biti pojedina ploha. Ako je srednja kockica zelena, tada cijela ta strana treba biti zelena. Uočiti šest boja: zelena, bijela, crvena, narančasta, plava i žuta.

3. korak

   Vježbati okretanje svake strane u smjeru kazaljke na satu i obrnuto. Na primjer okrenuti desnu plohu u smjeru kazaljke na satu znači okrenuti je desnom rukom od sebe, a okrenuti lijevu stranu u smjeru kazaljke na satu znači okrenuti je lijevom rukom prema sebi. Prednja i gornja strana u smjeru kazaljke na satu se okreću u desno.

4. korak

   Položiti kocku tako da gornja strana bude zelene boje. Pokušati složiti križ od zelenih kockica. Pri tome treba uskladiti srednje dvije kockice bočnih strana tako da budu jednake boje. Pri tome je moguće naići samo na jednu teškoću i to kad je potrebno zamijeniti mjesta bojama koje pripadaju istoj kockici. Na primjer zeleno i bijelo, pri čemu se zeleno nalazi bočno, a bijelo gore. Postaviti kocku tako da se gleda u kockicu čije boje treba zamijeniti.

5. korak

   Sada je gornja, zelena strana složena u križ od 5 kockica koje ujedno pašu s bočne strane. Potrebno je položiti još četiri vršne kockice. Svaka vršna kockica treba imati zelenu plohu i dvije plohe onih boja koje su boje bočne strane u tom uglu. Takvu kockicu treba namjestiti u donji red desno i zatim uzastopno izvoditi algoritam polaganja vršne kockice dok se ne posloži na pravo mjesto u pravi položaj. Tako treba položiti svaku od četiri vršne kockice.

6. Korak

   Okrenuti kocku tako da složena zelena ploha bude donja strana, a ono što će naknadno biti žuta ploha je sada gore.

7. korak

   Promotriti srednju kockicu gornjeg vijenca koja u sebi nema žute boje. Nju treba namjestiti tako da se bočna boja poklopi sa srednjom kockicom bočne strane. Npr. Ako srednja kockica gornjeg vijenca ima bočno crvenu i gore bijelu boju, okreće se gornji vijenac dok se ne uskladi crvena boja na crvenu bočnu stranu. Bijela strana je onda okrenuta gore.

8. korak

   Gornja strana srednje kockice može tražiti desno ili lijevo. To znači da se ploha iste boje kao što je gornja strana može nalaziti ili lijevo ili desno ako se gleda u tu kockicu.

9. korak

   Promotriti gornju, žutu plohu. Cilj je napraviti žuti plus (križ). To se jednostavno radi ponavljanjem jednog algoritma ali uz napomenu da treba pratiti što se događa s žutim stranama. Ako se one poslože u obliku slova l od tri strane onda ih treba postaviti u gornji lijevi kut, ako se one poslože u liniju od tri strane onda tu liniju treba postaviti od lijeva prema desno.

10. korak

Sada je žuti križ gotov i treba ga položiti tako da mu se bočne strane poslože prema bočnim bojama ploha. To vjerojatno neće odmah biti moguće, zato se najprije treba posložiti desna boja i stražnja boja. Ako ni to nije moguće uzastopno izvoditi algoritam za podešavanje bočnih strana križa. Nekad je dovoljno jedno ponavljanje, nekad više, ali pravilnim izvođenjem tog algoritma ne ruši se ono što je već složeno. Provjeriti da li je moguće posložiti desnu i stražnju stranu prije nego ponovite algoritam.

11. korak

Ostale su četiri bočne kockice koje moraju biti na pravom mjestu. To znači da, na primjer, žuto-narančasto-bijela kockica treba biti na uglu gdje se spajaju žuta, narančasta i bijela ploha. Možda je tamo, ali najvjerojatnije nije. Kako god, ne dirati ništa . Za taj postupak obavezan je algoritam namještanja vršnih kockica kako se ne bi porušilo ono što je već sagrađeno. Jedini uvjet kojeg treba znati prije izvođenja algoritma je da ukoliko već postoji neka kockica koja se nalazi na dobrom uglu treba okrenuti kocku tako da to bude desni ugao.

12. korak

Sada se sve kockice nalaze na dobrom uglu, ali nisu još pravilno okrenute. Ovo je pitanje povjerenja. Izvodi se jedan već naučeni algoritam i to tako da će se pritom porušiti sve sagrađeno, ali na kraju će sve doći na svoje mjesto. Dakle, jednu od kockica koje treba složiti staviti u desni ugao. Strana koja je sada prednja treba ostati prednja do kraja. Izvoditi algoritam polaganja vršne kockice toliko puta dok se kockica ne položi u željeni položaj (žuta strana gore). Svaki put kada se izvodi algoritam potrebno je izbrojati sva četiri koraka i tek onda provjeriti da li je kockica dobila svoj dobar položaj. Ako nije, ponoviti algoritam. Ako je, okretati samo gornju stranu u smjeru suprotnom od kazaljke na satu sve dok sljedeća vršna kockica koju treba položiti pravilno ne dođe na to mjesto: desno u uglu.

5. ZAKLJUČAK

U ovom radu se definirala problematika Rubikove kocke, odnosno njezina struktura, povijest, mogućnosti i metodologija slaganja. Rubikova kocka je trodimenzionalna mehanička igračka, koju je 1974. godine izumio mađarski kipar i profesor arhitekture Erno Rubik. Rubik je igračku prvobitno nazvao "Čarobna kocka" i licencirao je 1980. godine, a ona je doživjela nezapamćen uspjeh, prvo u Njemačkoj, gdje je 1980. proglašena igračkom godine, a zatim i širom svijeta. Do 2005. je prodano preko 300 milijuna primjeraka ove igračke. Postoji nekoliko inačica Rubikove kocke. U klasičnoj inačici, svaka od šest strana kocke ima 9 kvadratića (u bijeloj, crvenoj, narančastoj, plavoj, žutoj i zelenoj boji), koje treba složiti tako da svaka strana bude jednobojna. Matematičari su izračunali da postoji oko 43 trilijuna kombinacija kocke. Unatoč tome, kocku je moguće složiti u ispod 30 poteza. Dovoljno je samo 20 poteza da se kocka složi iz bilo kojeg stanja, ali zbog činjenice da to nitko ne zna napraviti, 20 se naziva "Božjim brojem". Važnost rubikove kocke je višestruka, kao igračka važna je najmlađima, ali i starijima. Nadalje prepoznata je i u znanstvenom smislu pa je sve više ljudi proučava i istražuje. Kao pojava popularna je diljem svijeta.

LITERATURA

[1] D. Joyner, Adventures in Group Theory: Rubik's Cube, Merlin's Machine, and Other

[2] F. M. Bruckler,¨ Grupa Rubikove kocke, Poučak 36 (2009) 4-15

[3] Mathematical Toys, The Johns Hopkins University Press, 2002.

[4] Bump, Mathematics of the Rubik's Cube, http://match.stanford.edu/bump/rubik

[5] D. Kunkle & C. Cooperman, Twenty-Six Moves Suffice for Rubik's Cube, Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC '07), ACM Press, 2007.

[6] T. Davis, Group Theory via Rubik's Cube, http://www.geometer.org/rubik/group.pdf

[7] J. Slocum, D. Sonneveld, The 15 Puzzle Book, 2006.

[8] J. Trajber, Rubikova kocka - Priručnik za slaganje, Prosvjeta, Zagreb, 1982.

[9] Lecture Notes on the Mathematics of the Rubik's Cube, http://www.permutationpuzzles.org/rubik/webnotes/rubiknotes.html

[10] W. D. Joyner, Adventures in Group Theory: Rubik's Cube, Merlin's Machine, and Other Mathematical Toys, The Johns Hopkins University Press, 2002.

[11] https://www.google.hr/url?sa=i&source=images&cd=&ved=2ahUKEwj8m6fF3bvkAhXCzKQKHYj4AMYQjRx6BAgBEAQ&url=https%3A%2F%2Fwww.poklonimi.com%2Fpokloni%2Frubikova-kocka-square-one-yj-8326%2F&psig=AOvVaw0f69AG_BMnnyH9j_etC4q1&ust=1567843283155479

[12] https://www.google.hr/url?sa=i&source=images&cd=&ved=2ahUKEwiSz9v63bvkAhWJZ1AKHcHKDXIQjRx6BAgBEAQ&url=https%3A%2F%2Fhlavolamy.heureka.sk%2Frecenttoys-pyramida%2F&psig=AOvVaw0DjGYf8MnQJVIyr-M2KrSN&ust=1567843393240292

[13] https://www.google.hr/url?sa=i&source=images&cd=&ved=2ahUKEwjUv5yy3rvkAhVSZVAKHXh3ACIQjRx6BAgBEAQ&url=http%3A%2F%2Fwww.mathos.unios.hr%2F~mdjumic%2Fuploads%2Fdiplomski%2FBAR59.pdf&psig=AOvVaw0Ssg_scXixUJMAGVzDF2X3&ust=1567843499032168

[14] https://www.google.hr/url?sa=i&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwjUoebW4LvkAhWCMewKHShqAqUQjRx6BAgBEAQ&url=%2Furl%3Fsa%3Di%26source%3Dimages%26cd%3D%26ved%3D%26url%3Dhttp%253A%252F%252Fwww.mathos.unios.hr%252F~mdjumic%252Fuploads%252Fdiplomski%252FBAR59.pdf%26psig%3DAOvVaw2H3iYDtfUuBOIK6rWFjjXN%26ust%3D156784

4074058032&psig=AOvVaw2H3iYDtfUuBOIK6rWFjjXN&ust=1567844074058032

[15] https://www.google.hr/url?sa=i&source=images&cd=&ved=2ahUKEwjE3f7z4bvkAhWM_aQKHQUQC50QjRx6BAgBEAQ&url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3D2l_cjYcDGGA&psig=AOvVaw1_gZxoRuJ8EnisrwtOLs6V&ust=1567844436118286

[16] https://www.google.com/imgres?imgurl=https%3A%2F%2Fwww.rubiks.com%2Fmedia%2Fcatalog%2Fproduct%2Fcache%2Fc687aa7517cf01e65c009f6943c2b1e9%2Fr%2Fu%2Frubiks-360.jpg&imgrefurl=https%3A%2F%2Fwww.rubiks.com%2Fen-eu%2Frubik-s-360.html&docid=CdugVngc-z4rrM&tbnid=3dk9NV0G-HdEnM%3A&vet=10ahUKEwjo5NCk47vkAhWkAGMBHb1tAl0QMwg6KAAwAA..i&w=700&h=700&bih=576&biw=1366&q=rubik%27s%20360&ved=0ahUKEwjo5NCk47vkAhWkAGMBHb1tAl0QMwg6KAAwAA&iact=mrc&uact=8

[17] https://www.google.hr/search?q=rubikova+kocka&sxsrf=ACYBGNQDkahpxhj5G_EKoCIyj4a0FAOsDw:1567879319329&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjb_oPPpb_kAhXLMewKHeBRCxAQ_AUIEigB&biw=1366&bih=625#imgrc=fzM75rTPi-969M

POPIS SLIKA

POPIS KRATICA

HTM (eng. *half-turn metric)*	zakret do pola kruga
QTM (eng. *quarter-turn metric*)	zakret do četvrtine kruga