Faktorska analiza

Putnik, Dražen

SVEUČILIŠTE U SPLITU

POMORSKI FAKULTET

DRAŽEN PUTNIK

FAKTORSKA ANALIZA

ZAVRŠNI RAD

SPLIT, 2019.

SVEUČILIŠTE U SPLITU

POMORSKI FAKULTET

STUDIJ: POMORSKETEHNOLOGIJE JAHTA I MARINA

FAKTORSKA ANALIZA

ZAVRŠNI RAD

MENTOR: **STUDENT:**

Izv. prof. dr. sc. Igor Jelaska **Dražen Putnik (MB: 0171264233)**

SPLIT, 2019.

SAŽETAK

Cilj ovog rada je objasniti i linearno-algebarskim tehnikama prikazati izračun jednog od najčešće korištenih matematičko-statističkih postupaka za redukciju dimenzionalnosti velikih skupova podataka današnje znanosti i prakse – faktorske analize. U skladu sa ciljem, prikazana je matrična algebra izračuna faktorske analize te je numerički demonstrirana rotacija faktora, obzirom na kompleksnost problematike, samo za određeni kut. Naglašeno je kako kosokutne rotacije, za razliku od ortogonalnih omogućavaju utvrđivanje faktora višeg reda, time postaju utilitarnije u znanstvenoj praksi. Unatoč nepostojanju potpunog konsenzusa u znanosti o uporabi i primjeni vrsta rotacije za stručnu ali i znanstvenu praksu, naročito u pomorskoj i srodnim znanostma, istaknuto je da je nedvojbeno postojanje međusobno zavisnih odnosa među ekstrahiranim latentnim konstruktima - faktorima. Računske operacije matrične algebre u ovom radu ponudile su jedno od bezbroj mogućih rješenja kosokutnih rotacije, te sukladno cilju rada ukazali na nužnost rotacije inicijalne matrice glavnih osovina. Rezultati ovog rada mogu poslužiti dobivanju dubljeg uvida u problematiku primjene faktorske analize u pomorskoj ali i srodnim znanostima.

Ključne riječi: *faktor, matrica, latentna varijabla, rotacija*

ABSTRACT

The aim of this thesis is to explain by using linear algebra, the calculation of one of the most commonly used mathematical-statistical methods for reducing the dimensionality of large datasets of present-day science and practice - factor analysis. In accordance with the objective, the matrix algebra of the factor analysis calculations is presented, and the rotation of the factors, given the complexity of the problem, is numerically demonstrated only for a given angle. It has been emphasized that, as opposed to orthogonal rotations, oblique rotations allow the determination of higher order factors, thus becoming more utilitarian in scientific practice. Despite the lack of complete consensus in the science of the use and application of rotation types for professional and scientific practice, especially in the maritime and related sciences, it is emphasized that the existence of interdependent relationships among extracted latent constructs - factors. The computational operations of matrix algebra in this paper offered one of a possible solutions to rotations, and in accordance with the aim of the paper, pointed out the necessity of rotation of the initial matrix of the principal axes. The results of this paper can serve to gain a deeper insight into the problem of the application of factor analysis in the maritime and related sciences.

Keywords: factor, matrix, latent variable, rotation

SADRŽAJ

1. FAKTORSKA ANALIZA KAO MULTIVARIJATNA METODA REDUKCIJE DIMENZIONALNOSTI

Faktorska analiza predstavlja zajedničko ime za više metoda kojima je zajednički cilj kondenzacija većeg broja manifesnih varijabli, među kojima postoji povezanost na manji broj latentnih dimenzija, faktora. Dakle, primarni cilj faktorske analize jest utvrđivanje temeljnih dimenzija, odrednica, čimbenika ili pojednostavljeno faktora, u nekom području od znanstvenog interesa.

Faktorska analiza polazi od mjera povezanosti među varijablama, koeficijenata korelacije ili kovarijance. Zbog velikog broja varijabli i njihovih koeficijenata, otežan je dublji i jasniji uvid u zakonitosti i strukturu proučavanih pojava (Petz, 1997). Princip parsimonije (štednje) koristimo u objašnjavanju što većeg broja pojava manjim brojem značajnih faktora.

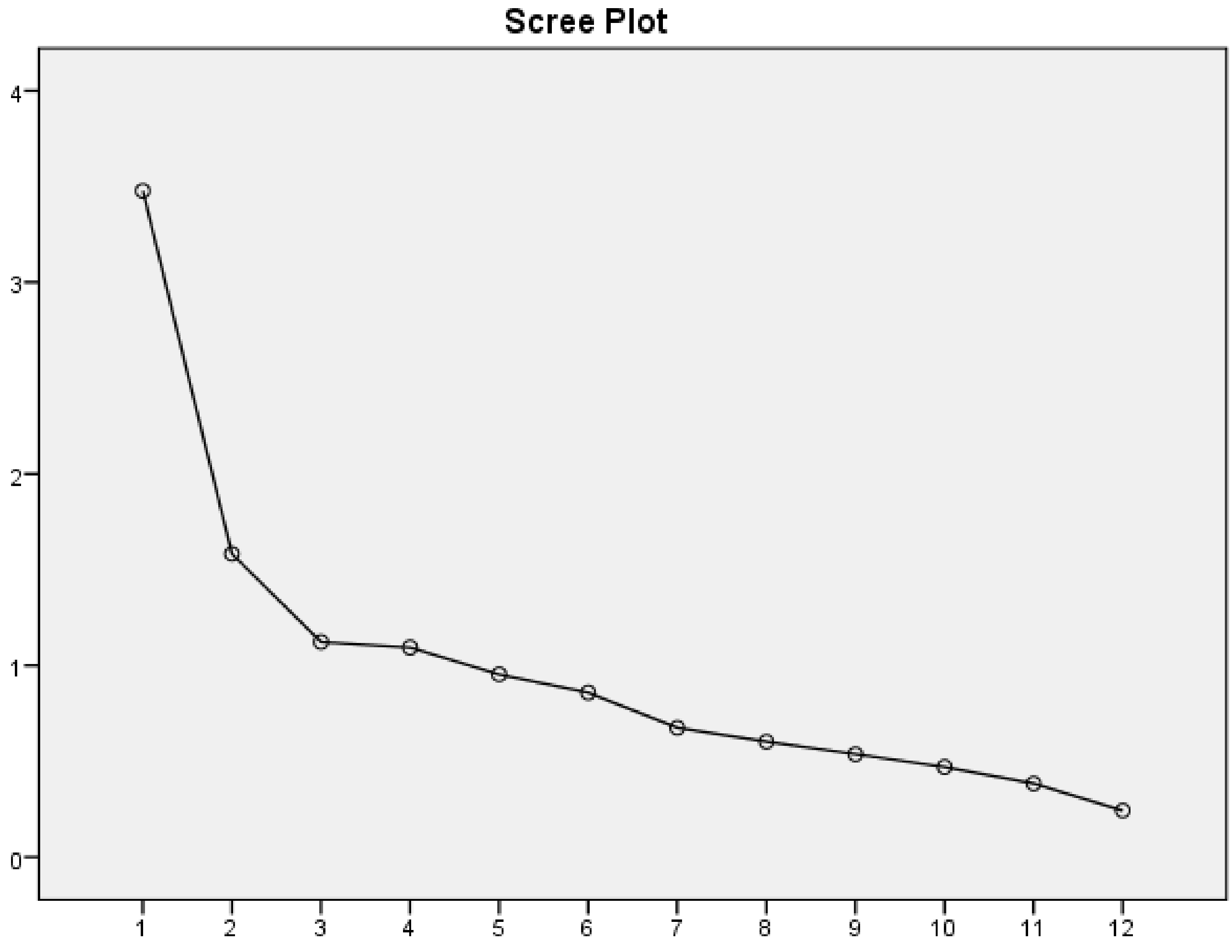
Faktori predstavljaju krajnji rezultat faktorske analize. Možemo ih objasniti kao linearnu kombinaciju manifesnih varijabli, dobivenih mjerenjem uzrokovanih složenim varijablama koje se nazivaju latentne dimenzije. Osnovni zadatci faktorske analize su:

a) Utvrđivanje faktora koji leže u osnovama međusobne povezanosti većeg broja manifesnih varijabli
b) Utvrđivanje povezanosti pojedinih manifesnih varijabli s tim faktorima

Faktorsku analizu dijelimo na dva osnova tipa, eksplorativnu i konfirmativnu. Najširu uporabu u praksi ima eksplorativni tip, odnosno preciznije rečeno njegov komponentni model koji na nereduciranoj korelacijskoj matrici utvrđuje faktore u nekom unaprijed nepoznatom prostoru (Mejovšek, 2008). Komponentni model predložio je Hotelling 1933, a najčešće koristi u realnoj metrici. Sve daljnje analize u ovom radu slijede postavke eksplorativnog komponentnog modela (eng.*principal components*). Korelacijska matrica osnova je provođenja faktorske analize, sadrži koeficijente korelacija manifesnih varijabli.

Komponentni model predstavlja metodu glavnih komponenti prema Hotellingu (1933), s ciljem dobivanja broja faktora koliko je i početnih manifesnih varijabli. Provodi se na potpunoj korelacijskoj matrici, sa jedinicama na glavnoj dijagonali čime je uključena ukupna varijanca. Glavne komponente se računaju u sukcesiji, time objašnjavamo maksimalno mogući dio varijance počevši od prve. Ima za cilj objasniti što veću količinu ukupne varijance manifesnih varijabli. Komponentni modela faktorske analize rješava problem utvrđivanja faktora spektralnom dekompozicijom matrice, rješavanjem karakteristične jednadžbe korelacijske matrice, iz koje dobijemo matricu svojstvenih vektora. Problem određivanja broja glavnih komponenti koje treba zadržati, ili odbaciti rješava se pomoću kriterija u fazi redukcije.

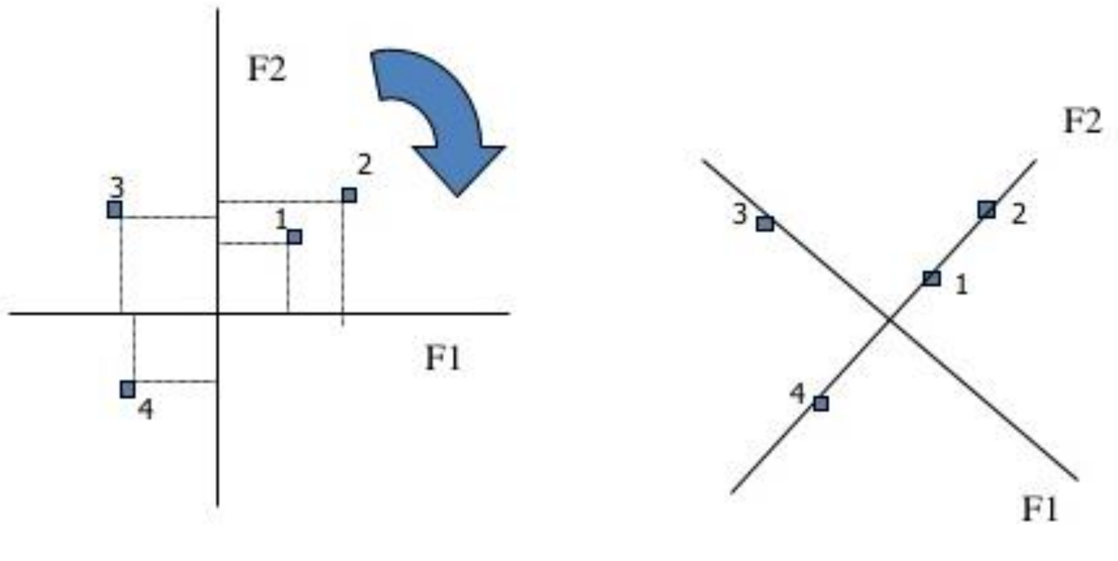
Tri kriterija za redukciju faktora profilirala su se kao najučestalije korištena istraživanjima: Guttman Kaiser, Cattellov Scree Plot test (Slika 1) i Štalec Momirović (PB kriterij) (Malacko, Popović, 1997).



Slika 1: Grafički prikaz Scree testa

Preuzeto sa: www.semanticscholar.org

Nakon dobivenih glavnih komponenti faktora treba izvršiti rotaciju s ciljem dobivanja konačnih faktora (Slika 2).



x1	0.5	0.5
x2	0.8	0.8
x3	-0.7	0.7
x4	-0.5	-0.5

x1	0	0.6
x2	0	0.9
x3	-0.9	0
x4	0	-0.9

Slika 2: Grafički prikaz rotacija te numerički prikaz u faktorskoj analizi

Preuzeto sa: www.slideshare.net

Temeljno načelo rotacije prema Thurstonu vrlo je objektivan postupak u kojem je nužno težiti da svaka manifesna varijabla odnosno skup varijabli mora biti reprezentiran sa što je manje moguće faktora. Cilj rotacije je konačnu strukturu faktora približit idealu u kojem bi svaka varijabla imala visoku korelaciju samo sa jednim faktorom, a sve ostale niske ili nulte (Quinn i Keough, 2002). Sav postupak temelji se na interpretabilnijim faktorima nakon postupka rotacije. Rotacije inicijalnog sustava glavnih osovina izvode se sa ili bez zadržavanja ortogonalnosti među faktorima, prema određenom matematičkom kriteriju koji će zadržati jednostavnu strukturu. Postoji velik broj analitičkih rotacija, koje možemo svrstati u dvije skupine: ortogonalne i neortogonalne (kosokutne). Razlikuju se što ortogonalne rotacije zadržavaju nezavisnost „sirovih“ faktora i glavnih komponenti, dok se neortogonalne ne uvjetuju linearnom nezavisnosti faktora.

Za sada nema konsenzusa u opravdanosti korištenja jednih ili drugih rotacija Dizdar (2006) (Halmi, 1999, Fulgosi, 1988) mada je u znanstvenoj praksi sasvim opravdano pretpostaviti da postoje određene povezanosti u sustavima varijabli koje opisuju neke fenomene.

Prednosti kosokutnih rotacija su u tome što dobivamo više informacija o povezanosti faktora. Kao rezultat svake kosokutne rotacije dobijemo tri matrice rezultata:

a) matrica sklopa - predstavlja matricu koordinata ili paralelnih projekcija manifesnih varijabli na transformirane faktore

b) matricu strukture - predstavlja matricu korelacija ili ortogonalnih projekcija manifesnih varijabli na faktore

c) matrica korelacija među faktorima

Paralelne projekcije predstavljaju faktorske koeficijente ili pondere sa sličnom ulogom kao beta koeficijenti u regresijskoj analizi (Norman i Kotz, 1997).

Na kraju, nakon interpretacije svih faktora, pregleda se matrica interkorelacija faktora.

U skladu sa ciljem rada uzet je uzorak hipotetskih podataka od 3 hipotetska ispitanika Sukladno cilju istraživanja, analiza točnosti matričnog računskog postupka izvršena je u paketu Statistica 13.0. (Softstat, SAD).

2. LINEARNO-ALGEBARSKI PRISTUP FAKTORSKOJ ANALIZI

U skadu sa ciljem ovog završnog rada, u ovom poglavlju biti će prikazane linearno algebarske tehnike u pozadini faktorske analize (Halmi, 1999).

Neka je **B** matrica nestandardiziranih hipotetskih podataka

$$B = \begin{bmatrix} 182 & 104 & 120 & 160 \\ 178 & 80 & 120 & 140 \\ 177 & 87 & 115 & 140 \\ 177 & 100 & 130 & 180 \\ 180 & 77 & 105 & 150 \\ 187 & 94 & 110 & 160 \\ 183 & 86 & 105 & 150 \\ 172 & 83 & 90 & 130 \\ 175 & 72 & 85 & 90 \\ 193 & 100 & 105 & 110 \end{bmatrix}$$

Prvo se računa:

$$\mathbf{m} = \mathbf{B}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{1} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 182 & 178 & 177 & 177 & 180 & 187 & 183 & 172 & 175 \\ 104 & 80 & 87 & 100 & 77 & 94 & 86 & 83 & 72 \\ 120 & 120 & 115 & 130 & 105 & 110 & 105 & 90 & 85 \\ 160 & 140 & 140 & 180 & 150 & 160 & 150 & 130 & 90 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} * \frac{1}{10} =$$

$$\begin{bmatrix} 1804 \\ 883 \\ 1085 \\ 1410 \end{bmatrix} * \frac{1}{10} = \begin{bmatrix} 180{,}4 \\ 88{,}3 \\ 108{,}5 \\ 141 \end{bmatrix}$$

Vektor aritmetičkih sredina u varijablama iz matrice **B** predstavlja **m**, dok je n broj ispitanika.

Slijedi postupak-transponirana matrica B pomnožena s jediničnim vektorom

$$\mathbf{B_c} = \mathbf{B} - \mathbf{1} \cdot \mathbf{m}^T$$

$$\mathbf{B_c} = \begin{bmatrix} 182 & 104 & 120 & 160 \\ 178 & 80 & 120 & 140 \\ 177 & 87 & 115 & 140 \\ 177 & 100 & 130 & 180 \\ 180 & 77 & 105 & 150 \\ 187 & 94 & 110 & 160 \\ 183 & 86 & 105 & 150 \\ 172 & 83 & 90 & 130 \\ 175 & 72 & 85 & 90 \\ 193 & 100 & 105 & 110 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 180{,}4 & 88{,}3 & 108{,}5 & 141 \end{bmatrix} =$$

$\mathbf{B_c}$ matrica centriranih podataka dobivena operacijom gdje je jedinični vektor pomnožen s transponiranim vektorom aritmetičkih sredina ($\mathbf{m}^T$) iz matrice **B**

$$\begin{bmatrix} 182 & 104 & 120 & 160 \\ 178 & 80 & 120 & 140 \\ 177 & 87 & 115 & 140 \\ 177 & 100 & 130 & 180 \\ 180 & 77 & 105 & 150 \\ 187 & 94 & 110 & 160 \\ 183 & 86 & 105 & 150 \\ 172 & 83 & 90 & 130 \\ 175 & 72 & 85 & 90 \\ 193 & 100 & 105 & 110 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 180{,}4 & 88{,}3 & 108{,}5 & 141 \\ 180{,}4 & 88{,}3 & 108{,}5 & 141 \\ 180{,}4 & 88{,}3 & 108{,}5 & 141 \\ 180{,}4 & 88{,}3 & 108{,}5 & 141 \\ 180{,}4 & 88{,}3 & 108{,}5 & 141 \\ 180{,}4 & 88{,}3 & 108{,}5 & 141 \\ 180{,}4 & 88{,}3 & 108{,}5 & 141 \\ 180{,}4 & 88{,}3 & 108{,}5 & 141 \\ 180{,}4 & 88{,}3 & 108{,}5 & 141 \\ 180{,}4 & 88{,}3 & 108{,}5 & 141 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}6 & 15{,}7 & 11{,}5 & 19, \\ -2{,}4 & -8{,}3 & 11{,}5 & -1 \\ -3{,}4 & -1{,}3 & 6{,}5 & -1 \\ -3{,}4 & 11{,}7 & 21{,}5 & 39 \\ -0{,}4 & -11{,}3 & -3{,}5 & 9 \\ 6{,}6 & 5{,}7 & 1{,}5 & 19 \\ 2{,}6 & -2{,}3 & -3{,}5 & 9 \\ -8{,}4 & -5{,}3 & -18{,}5 & -11 \\ -5{,}4 & -16{,}3 & -23{,}5 & -51 \\ 12{,}6 & 11{,}7 & -3{,}5 & -31 \end{bmatrix}$$

Sada se računa **V**:

$$\mathbf{V} = \sqrt{diag(\mathbf{B}_c^T \mathbf{B}_c \frac{1}{n})}$$

Izračun dijagonalne matrice centriranih podataka preko drugog korijena iz matice centriranih podataka i njene transponirane vrijednosti, obzirom na broj ispitanika (n) .

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1,60 & -2,40 & -3,40 & -3,40 & -0,40 & 6,60 & 2,60 & -8,40 & -5,40 \\ 15,70 & -8,30 & -1,30 & 11,70 & -11,30 & 5,70 & -2,30 & -5,30 & -16,30 \\ 11,50 & 11,50 & 6,50 & 21,50 & -3,50 & 1,50 & -3,50 & -18,50 & -23,50 \\ 19,00 & -1,00 & -1,00 & 39,00 & 9,00 & 19,00 & 9,00 & -11,00 & -51,00 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} 1,60 & 15,70 & 11,50 & 19,00 \\ -2,40 & -8,30 & 11,50 & -1,00 \\ -3,40 & -1,30 & 6,50 & -1,00 \\ -3,40 & 11,70 & 21,50 & 39,00 \\ -0,40 & -11,30 & -3,50 & 9,00 \\ 6,60 & 5,70 & 1,50 & 19,00 \\ 2,60 & -2,30 & -3,50 & 9,00 \\ -8,40 & -5,30 & -18,50 & -11,00 \\ -5,40 & -16,30 & -23,50 & -51,00 \\ 12,60 & 11,70 & -3,50 & -31,00 \end{bmatrix} \times \frac{1}{10} =$$

$$\begin{bmatrix} 340,40 & 325,80 & 136,00 & 26,00 \\ 325,80 & 1050,10 & 824,50 & 1277,00 \\ 136,00 & 824,50 & 1702,50 & 2515,00 \\ 26,00 & 1277,00 & 2515,00 & 6090,00 \end{bmatrix} \times \frac{1}{10} =$$

$$\begin{bmatrix} 34,04 & 32,58 & 13,60 & 2,60 \\ 32,80 & 105,01 & 82,45 & 127,70 \\ 13,60 & 82,45 & 170,25 & 251,50 \\ 2,60 & 127,70 & 251,50 & 609,00 \end{bmatrix}$$

Sada se računa:

$$V=\sqrt{\begin{bmatrix} 34{,}04 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 105{,}01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 170{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 609{,}00 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 5{,}83 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10{,}24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13{,}04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24{,}67 \end{bmatrix}$$

Korištenjem gornje formule izračunat ćemo matricu rezultata etniteta, pri čemu $\mathbf{V}^{-1}$ predstavlja dijagonalnu matricu standardnih devijacija, $\mathbf{B_c}$. matricu centriranih podataka

Operacijom

$$\mathbf{Z} = \mathbf{B_c}\mathbf{V}^{-1}$$

gdje je:

$\mathbf{B_c}$ matrica centriranih podataka,

$\mathbf{V}^{-1}$ dijagonalna matrica standardnih devijacija varijabli iz matrice **B**,

izračunamo matricu **Z** koja predstavlja rezultate ispitanika u standardiziranim vrijednostima.

Računa se:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1{,}6 & 15{,}7 & 11{,}5 & 19 \\ -2{,}4 & -8{,}3 & 11{,}5 & -1 \\ -3{,}4 & -1{,}3 & 6{,}5 & -1 \\ -3{,}4 & 11{,}7 & 21{,}5 & 39 \\ -0{,}4 & -11{,}3 & -3{,}5 & 9 \\ 6{,}6 & 5{,}7 & 1{,}5 & 19 \\ 2{,}6 & -2{,}3 & -3{,}5 & 9 \\ -8{,}4 & -5{,}3 & -18{,}5 & -11 \\ -5{,}4 & -16{,}3 & -23{,}5 & -51 \\ 12{,}6 & 11{,}7 & -3{,}5 & -31 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0{,}17 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}09 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}07 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}04 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0{,}27 & 1{,}53 & 0{,}88 & 0{,}77 \\ -0{,}41 & -0{,}81 & 0{,}88 & -0{,}04 \\ -0{,}58 & -0{,}13 & 0{,}50 & -0{,}04 \\ -0{,}58 & 1{,}14 & 1{,}65 & 1{,}58 \\ -0{,}07 & -1{,}10 & -0{,}27 & 0{,}36 \\ 1{,}13 & 0{,}56 & 0{,}11 & 0{,}77 \\ 0{,}45 & -0{,}22 & -0{,}27 & 0{,}36 \\ -1{,}44 & -0{,}52 & -1{,}42 & -0{,}45 \\ -0{,}93 & -1{,}59 & -1{,}80 & -2{,}07 \\ 2{,}16 & 1{,}14 & -0{,}27 & -1{,}26 \end{bmatrix}$$

Nakon što smo izračunali matricu **Z**, matricu korelacija iz varijabli **Z** računamo operacijom:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Z}^{\mathrm{T}}\mathbf{Z} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0{,}27 & -0{,}41 & -0{,}58 & -0{,}58 & -0{,}07 & 1{,}13 & 0{,}45 & -1{,}44 & -0{,}93 & 2{,}16 \\ 1{,}53 & -0{,}81 & -0{,}13 & 1{,}14 & -1{,}10 & 0{,}56 & -0{,}22 & -0{,}52 & -1{,}59 & 1{,}14 \\ 0{,}88 & 0{,}88 & 0{,}50 & 1{,}65 & -0{,}27 & 0{,}11 & -0{,}27 & -1{,}42 & -1{,}80 & -0{,}27 \\ 0{,}77 & -0{,}04 & -0{,}04 & 1{,}58 & 0{,}36 & 0{,}77 & 0{,}36 & -0{,}45 & -2{,}07 & -1{,}26 \end{bmatrix} \times$$

$$
\begin{bmatrix}
0{,}27 & 1{,}53 & 0{,}88 & 0{,}77 \\
-0{,}41 & -0{,}81 & 0{,}88 & -0{,}04 \\
-0{,}58 & -0{,}13 & 0{,}50 & -0{,}04 \\
-0{,}58 & 1{,}14 & 1{,}65 & 1{,}58 \\
-0{,}07 & -1{,}10 & -0{,}27 & 0{,}36 \\
1{,}13 & 0{,}56 & 0{,}11 & 0{,}77 \\
0{,}45 & -0{,}22 & -0{,}27 & 0{,}36 \\
-1{,}44 & -0{,}52 & -1{,}42 & -0{,}45 \\
-0{,}93 & -1{,}59 & -1{,}80 & -2{,}07 \\
2{,}16 & 1{,}14 & -0{,}27 & -1{,}26
\end{bmatrix} \times \frac{1}{10} =
$$

$$
\begin{bmatrix}
10{,}00 & 5{,}45 & 1{,}79 & 0{,}18 \\
5{,}45 & 10{,}00 & 6{,}17 & 5{,}05 \\
1{,}79 & 6{,}17 & 10{,}00 & 7{,}81 \\
0{,}18 & 5{,}05 & 7{,}81 & 10{,}00
\end{bmatrix} \times \frac{1}{10} =
\begin{bmatrix}
1{,}00 & 0{,}54 & 0{,}18 & 0{,}02 \\
0{,}54 & 1{,}00 & 0{,}62 & 0{,}50 \\
0{,}18 & 0{,}62 & 1{,}00 & 0{,}78 \\
0{,}02 & 0{,}50 & 0{,}78 & 1{,}00
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}
1{,}00 & 0{,}54 & 0{,}18 & 0{,}02 \\
0{,}54 & 1{,}00 & 0{,}62 & 0{,}50 \\
0{,}18 & 0{,}62 & 1{,}00 & 0{,}78 \\
0{,}02 & 0{,}50 & 0{,}78 & 1{,}00
\end{bmatrix} -
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
0{,}00 & 0{,}54 & 0{,}18 & 0{,}02 \\
0{,}54 & 0{,}00 & 0{,}62 & 0{,}50 \\
0{,}18 & 0{,}62 & 0{,}00 & 0{,}78 \\
0{,}02 & 0{,}50 & 0{,}78 & 0{,}00
\end{bmatrix}
$$

Nakon izračunate matrice korelacija potrebno je korištenjem softvera, primjerice na linku http://comnuan.com/cmnn01002/ izračunati svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice korelacija.

$$
\begin{bmatrix}
1{,}00 & 0{,}54 & 0{,}18 & 0{,}02 \\
0{,}54 & 1{,}00 & 0{,}62 & 0{,}50 \\
0{,}18 & 0{,}62 & 1{,}00 & 0{,}78 \\
0{,}02 & 0{,}50 & 0{,}78 & 1{,}00
\end{bmatrix} - \lambda
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
1-\lambda & 0{,}54 & 0{,}18 & 0{,}02 \\
0{,}54 & 1-\lambda & 0{,}62 & 0{,}50 \\
0{,}18 & 0{,}62 & 1-\lambda & 0{,}78 \\
0{,}02 & 0{,}50 & 0{,}78 & 1-\lambda
\end{bmatrix}
$$

$\lambda_1 = 2,40$
$\lambda_2 = 1,12$
$\lambda_3 = 0,28$
$\lambda_4 = 0,20$

$$\begin{bmatrix} 2,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1,54 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,52 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,44 \end{bmatrix}$$

Prema Guttman Kaiser kriteriju odabrane su komponente čije su svojstvene vrijednosti veće ili jednake jedan.

$$X1 = \begin{bmatrix} -0,37 \\ -0,69 \\ -0,71 \\ -0,65 \end{bmatrix}$$

$$X2 = \begin{bmatrix} 0,84 \\ 0,30 \\ -0,29 \\ -0,48 \end{bmatrix}$$

$$X3 = \begin{bmatrix} 0,52 \\ -0,76 \\ 0,17 \\ 0,32 \end{bmatrix}$$

$$X4 = \begin{bmatrix} -0,04 \\ -0,11 \\ 0,57 \\ -0,49 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -0,37 & 0,84 \\ -0,69 & 0,30 \\ -0,71 & -0,29 \\ -0,65 & -0,48 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1,54 & 0,00 \\ 0,00 & 1,05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,56 & 0,88 \\ -1,06 & 0,32 \\ -1,09 & -0,30 \\ -1,00 & -0,50 \end{bmatrix}$$

Elementi matrice **H** predstavljaju korelacije manifesnih varijabli glavnih komponenti i obično se naziva faktorska opterećenja. Matrica **H** obično se naziva matrica glavnih osovina.

2.1. Ortogonalne rotacije

Opći oblik transformirane matice za dvodimenzionalne transformacije, gdje je α kut što ga zatvaraju stare i nove faktorske osi. Iznos pomaka (rotacije) od 30 stupnjeva, a u tablicama se nalaze vrijednosti trigonometrijskih funkcija sukladne navedenom kutu (Fulgosi, 1988).

$$T = \begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}^{\mathbf{T}}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0{,}50 & -0{,}87 \\ 0{,}87 & 0{,}50 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0{,}50 & 0{,}87 \\ -0{,}87 & 0{,}50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 1{,}00 \end{bmatrix}$$

Matrica **M** predstavlja matricu koeficijenata korelacije ortogonalnih faktorskih osi, iz kojih uočavamo međusobne neovisnost faktora.

$$\mathbf{F} = \mathbf{HT} = \begin{bmatrix} -0{,}57 & 0{,}88 \\ -1{,}06 & 0{,}32 \\ -1{,}11 & -0{,}31 \\ -1{,}01 & -0{,}51 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0{,}50 & -0{,}87 \\ 0{,}87 & 0{,}50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}48 & 0{,}94 \\ -0{,}25 & 0{,}89 \\ -0{,}82 & 0{,}81 \\ -0{,}94 & 0{,}62 \end{bmatrix}$$

Matrica **F**, odnosno, matrica strukture predstavlja ortogonalne projekcije manifesnih varijabli na faktore.

2.2. Neortogonalne rotacije

Opći oblik kosokutne transformacijske matrice $\mathbf{T}^{-1}$ (Fulgosi, 1988), sadrži kosinuse i sinuse različitih kutova, odnosno smjerove novih osi u odnosu na korespondentne stare osi. Kosokutna transformacijska matrica nije ograničena uvjetima kao ortogonalna, nego samo jediničnom duljinom svakog stupca (Petz, 1997). U tablicama se nalaze vrijednosti trigonometrijskih funkcija koje odgovaraju novim pozicijama osi, odnosno novim kutovima koje zatvaraju.

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} cos\alpha & sin\beta \\ -sin\alpha & cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 50° & \sin 45° \\ -\sin 50° & \cos 45° \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A{=}FT} = \begin{bmatrix} 0{,}48 & 0{,}94 \\ -0{,}25 & 1{,}08 \\ -0{,}82 & 0{,}81 \\ -0{,}94 & 0{,}62 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0{,}64 & 0{,}71 \\ -0{,}77 & 0{,}71 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.42 & 0{,}99 \\ -0.99 & 0{,}59 \\ 0{,}87 & 0{,}01 \\ -0{,}79 & 0{,}28 \end{bmatrix}$$

Kosokutna faktorska struktura, prikazana matricom **A** sadrži podatke o veličini okomitih projekcija vektora pojedinih varijabli na kosokutne faktore. Budući da kod kosokutne rotacije nije određen kut između pojedinih faktorskih osi, pojedine faktorske osi mogu se pomicati neovisno jedna o drugoj (uz naravan oprez poradi možebitnog kolinearnog odnosa faktora). Matrica kosokutnog faktorskog obrasca može se dobiti na dva načina, jedan je direktnim putem na osnovi matrice ortogonalne strukture ili obrazaca, a drugi iz matrice kosokutne faktorske strukture.

$$\mathbf{M{=}\ T'T} = \begin{bmatrix} 0{,}64 & 0{,}77 \\ 0{,}71 & 0{,}71 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0{,}64 & 0{,}71 \\ 0{,}77 & 0{,}71 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}00 & -0{,}09 \\ -0{,}09 & 1{,}00 \end{bmatrix}$$

Matrica **M** predstavlja matricu koeficijenata korelacije kosokutnih faktorskih osi, iz kojih uočavamo međusobne korelacije faktora.

3. PRIKAZ RAČUNALOM GENERIRANE FAKTORSKE STRUKTURE HIPOTETSKIH PODATAKA

U ovom poglavlju biti će prikazana provjera prethodno realiziranih izračuna softverskim paketom Statistica 13.0.

Inicijalna matrica podataka hipotetskih, sirovih podataka dana je u tablici 1.

Tablica 1: Rezultati 10 ispitanika u hipotetskim varijablama

	A	B	C	D
1	182	104	160	120
2	178	80	140	120
3	177	87	140	115
4	177	100	180	130
5	180	77	150	105
6	187	94	160	110
7	183	86	150	105
8	172	83	130	90
9	175	72	90	85
10	193	100	110	105

Obzirom da su podaci hipotetski, iz matrice odabrane sa četiri varijable ne očekujemo dobiti interpretabilne faktore. Uz napomenu da u pravilima faktorske analize stoji kako je za dobivanje jednog faktora neophodno imati najmanje tri manifesne varijable koje dominantno grade taj faktor. Shodno tome faktore uzeti sa rezervom jer nemamo tri testa koji strukturiraju određeni faktor nego samo dva.

Odredimo maksimalni broj faktora na željeni broj (najbolje na broj manifesnih varijabli). Također, minimalnu svojstvenu vrijednost ostavimo na 1 jer je to u skladu sa GK kriterijem za redukciju faktora na one koji imaju varijancu veću od 1. Znači, dobivamo uvijek onoliko faktora koliko je manifesnih varijabli ali nisu nikada svi značajni pa ih trebamo reducirat samo na one s varijancom većom od 1 što će nam napraviti sam program Statistica.

Tablica 2: Prikaz svojstvenih vrijednosti (Eingevalues), te kumulativni prikaz u kojoj mjeri svi značajni faktori pridonose u objašnjenju varijance.

	Eigenvalue	% Total	Cumulative	Cumulative
1	2,40	60,06	2,40	60,06
2	1,12	28,10	3,53	88,16

Eigenvalues - su svojstvene vrijednosti (lambde) odnosno varijance ili veličine faktora. Dobivena su 2 značajna faktora koji imaju lambdu veću od 1. Ostali imaju manju pa ih je statistica eliminirala u skladu sa našim prethodno zadanim uvjetima za redukciju.

Ovim su napravljena prva dva koraka u faktorskoj analizi:

Ekstrakcije – izvlačenje ili dobivanje latentnih iz manifesnih varijabli

Redukcija - utvrđivanje broja faktora koje ima smisla koristiti u nastavku analize

% total varijance nam govori koliko posto od ukupne varijance svih manifesnih varijabli je objasnio svaki od značajnih faktora. Ostatak podataka je kumulativni prikaz varijanci i postotaka tako da zadnji broj govori koliko su svi značajni faktori objasnili % varijance manifesnih varijabli.

Ciljem prikaza logike ili neophodnost rotacije prikazat ćemo istovremeno rotirane (desno) i nerotirane korelacija (lijevo) da bi vidjeli kako ne rotirana solucija onemogućava smislenu interpretaciju faktora.

Tablica 3: Prikaz nerotirane matrice glavnih osovina i kosokutno rotirane matice sklopa

rotirano		
	Faktor	Faktor
visina	-0,03	0,96
masa	0,59	0,71
čučanj	0,94	-0,01
bench	0,92	0,19
Expl.Var	2,08	1,45
Prp.Totl	0,52	0,36

nerotirano		
	Faktor	Faktor
visina	-0,46	-0,85
masa	-0,86	-0,30
čučanj	-0,81	0,48
bench	-0,89	0,29
Expl.Var	2,40	1,12
Prp.Totl	0,60	0,28

Potrebno je rotirati ekstrahirane i reducirane faktore da ih se dovede u povoljniju poziciju (korelaciju) sa pojedinim skupovima visoko međusobno koreliranih manifesnih varijabli. Rotacija ima za cilj transformirati početno nepovoljno stanje za interpretaciju faktora u finalnu soluciju koja to olakšava (Tabachnick i Fidell, 2012).

Uporabom opcije *hierarhical analysis of oblique factors* za neortogonalne rotacije dobijemo matricu rotiranih korelacija faktora i varijabli, odnosno matricu sklopa faktora na osnovu koje određujemo koji je koji faktor.

Rotacija se izvodi s ciljem dobivanja jednostavne strukture faktora, odnosno teži se tomu da jedan faktor bude u što je moguće većoj korelaciji s jednim skupom varijabli (snopom gledano vektorski), a istovremeno što manjoj sa svim ostalim varijablama ili snopovima varijabli.

Prva glavna osovina prolazi između dva snopa varijabli što bliže svima, odnosno da bude u što većoj korelaciji sa svim varijablama u analizi. Druga je okomita na nju ali istom logikom je postavljena, da objasni što veći dio od ostatka varijance koji nije objasnila prva …

Rotacija se izvodi s ciljem dobivanja jednostavne strukture faktora, odnosno teži se tomu da jedan faktor bude u što je moguće većoj korelaciji s jednim snopom varijabli a istovremeno što manje sa svim ostalim varijablama ili snopovima varijabli (Schuyler, 2012).

Tablica 4: Prikaz korelacija ekstrahiranih faktora, empirijska potvrda kosokutnih rotacija

Korelacija među faktorima		
	1	2
1	1,00	0,41
2	0,41	1,00

Nakon postupka rotacije potrebito je pogledati matrica koeficijenata korelacije kosokutnih faktorskih osi, iz kojih uočavamo međusobne korelacije faktora, empirijsku potvrdu neortogonalnosti faktora.

4. ZAKLJUČAK

Unatoč nepostojanju konsenzusa u znanosti o uporabi i primjeni vrsta rotacije za stručnu ali i znanstvenu praksu nedvojbeno je postojanje međusobno zavisnih odnosa među faktorima. Linearno nezavisne faktore brojni autori smatraju umjetnim matematičkim konstruktima. Nužno je istaknuti kako kosokutne rotacije, za razliku od ortogonalnih omogućavaju utvrđivanje faktora višeg reda, time postaju utilitarnije u znanstvenoj praksi. Računske operacije matrične algebre u ovom radu ponudile su jedno od bezbroj mogućih rješenja kosokutnih rotacije, te sukladno cilju rada ukazali na nužnost rotacije inicijalne matrice glavnih osovina. Primarni cilj takvog postupka je što bolja interpretacija dobivenih faktora. Uporabu statističkog paketa *Statistica 13.0* brojni primjeri iz prakse pokazuju kao neadekvatnog u izvedbi kosih rotacija i njihovog grafičkog prikaza. Preporuka za buduće autore ogleda se u uporabi nekog podrobnijeg softverskog rješenja s ciljem preciznije obrade podatke i grafičkog prikaza istih.

5. LITERATURA

1. Dizdar, D. (2006). *Kvantitativne metode*. Kineziološki fakultet Sveučilište u Zagrebu,Zagreb
2. Fulgosi, A (1988*). Faktorska analiza*. Školska knjiga, Zagreb
3. Gerry P. Quinn, Michael J. Keough (2002), *Experimental Design and Data Analysis for Biologist*, Cambridge University Press, Cambridge.
4. Halmi, A. (1999). Temelji kvantitativne analize u društvenim znanostima: Zagreb: Sveučilište u Zagrebu.
5. Malacko, J., Popović, D. (1997). *Metodologija kineziološko antropoloških istraživanja*.
6. Mejovšek, M. (2008). *Metode znanstvenog istraživanja u društvenim i humanističkim znanostima*. Jastrebarsko, Naklada Slap
7. Norman L. Johnson, Samuel Kotz (1997). *Leading Personalities in Statistical Sciences*: A Wiley – Interscience Publication.
8. Petz, B. (1997). *Osnovne statističke metode za nematamatičare*. Jastrebarsko: Naklada Slap
9. Schuyler H. (2012). *Reading Statistics and Research.* Knoxwille: University of Tennessee.
10. Tabachnick B. i Fidell L. (2012). *Using Multivariate Statistics*. Northridge: California State University.
11. https://statistics.laerd.com/spss-tutorials.php (pristupljeno 07.06.2019)
12. https://www.theanalysisfactor.com/general-linear-model-anova-regression-same-model/ (pristupljeno 22.08.2019)

POPIS SLIKA

POPIS TABLICA