

# Jednadžbe dinamičke ravnoteže njihanja broda

---

Šalov, Ivan

Undergraduate thesis / Završni rad

2016

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Split, Faculty of Maritime Studies / Sveučilište u Splitu, Pomorski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:164:524127>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-16**

Repository / Repozitorij:

[Repository - Faculty of Maritime Studies - Split -  
Repository - Faculty of Maritime Studies Split for  
permanent storage and preservation of digital  
resources of the institution](#)



UNIVERSITY OF SPLIT



**SVEUČILIŠTE U SPLITU  
POMORSKI FAKULTET**

**IVAN ŠALOV**

**JEDNADŽBE DINAMIČKE RAVNOTEŽE  
NJIHANJA BRODA**

**ZAVRŠNI RAD**

**SPLIT, 2016.**

**SVEUČILIŠTE U SPLITU  
POMORSKI FAKULTET**

**STUDIJ: POMORSKA NAUTIKA**

**JEDNADŽBE DINAMIČKE RAVNOTEŽE  
NJIHANJA BRODA**

**ZAVRŠNI RAD**

**MENTOR:**

**Doc. dr. sc. Tatjana Stanivuk**

**STUDENT:**

**Ivan Šalov (MB: 0171260757)**

**SPLIT, 2016.**

## SAŽETAK

Matematika kao znanost i pomorstvo kao djelatnost prate se kroz povijest, a razvoj matematike je bitno utjecao na razvoj pomorstva. Već sama gradnja broda u osnovi ne bi bila potpuno moguća bez različitih matematičkih proračuna. Znanje matematike ima svoju primjenu i prilikom računanja kursa, stajnice i pozicije u plovidbi te u proračunima vezanim za ekonomičnost prijevoza tereta i stabilitet broda. U plovidbi brod nailazi na razne vremenske uvjete koji uzrokuju različita gibanja broda odnosno njihanja. U ovom radu objašnjena je dinamička ravnoteža njihanja matematičkim jednadžbama. Da bi razumjeli te jednadžbe potrebno je razumjeti njihanje broda kao fizikalne pojave te princip rješavanja matematičkih jednadžbi koje ih opisuju.

***Ključne riječi:*** matematika, pomorstvo, jednadžbe, njihanje broda.

## ABSTRACT

Mathematics as a science and the shipping industry as a business have always been related to each other through the history and development of the mathematics has strongly effected on the development of the shipping industry. Building ships wouldn't be possible without mathematic calculations. The knowledge of mathematics can be applied to calculate courses, line of position and positions or while underway to estimate the economy of different kinds of cargo shipments and their stability during loading and discharging. Every vessel faces various kinds of weather conditions which can cause different movements like swinging. Aim of this paper is to explain the dynamic balance of swinging using mathematic equations. To understand this equation it is necessary to understand first "the swinging" as physical phenomenon and principle of solving mathematical equations to describe them.

***Key words:*** mathematics, shipping industry, equations, swinging.

## SADRŽAJ:

<b>1. UVOD</b> .....	<b>1</b>
<b>2. MATEMATIKA I POMORSTVO</b> .....	<b>2</b>
2.1. MATEMATIKA.....	2
2.2. GEOMETRIJA.....	3
2.3. TRIGONOMETRIJA .....	4
2.4. POMORSTVO .....	5
2.4.1. Povijest pomorstva .....	5
2.4.2. Razvoj modernog pomorstva .....	6
<b>3. ELEMENTI STABILNOSTI BRODA</b> .....	<b>8</b>
3.1. TOČKE UPORIŠTA BRODA .....	8
3.2. MOMENT STATIČKE STABILNOSTI.....	10
3.3. DINAMIČKA STABILNOST .....	10
<b>4. NJIHANJE BRODA NA VALOVIMA</b> .....	<b>13</b>
4.1. PODJELA I KARAKTERISTIKE MORSKIH VALOVA .....	13
4.1.1. Frekvencija i susretni kut valova.....	15
4.2. PARAMETRI MORSKOG VALA.....	15
4.3. NJIHANJE BRODA NA HARMONIJSKIM VALOVIMA .....	18
4.3.1. Model njihanja broda .....	19
4.3.2. Koordinatni sustavi .....	21
4.4. OBLICI NJIHANJA.....	22
<b>5. DINAMIČKA RAVNOTEŽA NJIHANJA</b> .....	<b>25</b>
5.1. SIMETRIJA NJIHANJA.....	25
5.2. JEDNADŽBE DINAMIČKE RAVNOTEŽE .....	26
<b>6. ZAKLJUČAK</b> .....	<b>31</b>
<b>LITERATURA</b> .....	<b>32</b>
<b>POPIS SLIKA</b> .....	<b>33</b>

# 1. UVOD

Cijeli svoj vijek brod je u stalnom dodiru s morem. Ta čvrsta veza najčešće je obilježena dinamikom plovidbe u raznim vremenskim uvjetima. Posljedica tih uvjeta su valovi i nemirno more koje će uzrokovati gibanja broda odnosno njihanja. Specifičnost pomorske plovidbe u odnosu na druge grane transporta je što na brod veliki utjecaj imaju dva medija (more i zrak). Gibanja mora (valovi, struje) i zraka (vjetar) uglavnom nastoje brod pomaknuti iz stanja ravnoteže, pa brod mora imati sposobnost da se odupire takvim negativnim utjecajima. Ta sposobnost broda naziva se stabilnost broda. Stabilnost broda ovisi o formi trupa i razmještajem težina. Forma trupa projektira brodogradilište, dok je za razmještaj težina odgovoran zapovjednik broda.

Dinamičko njihanje je problematično jer ga je teško predvidjeti, a djeluje na način da potiče potencijalnu kinetičku energiju i mase dobivaju određenu inerciju. Dinamički utjecaj vanjskih sila zahtjeva dobru početnu stabilnost da bi brod bio uopće u stanju sigurnog njihanja. Čvrstoća brodske konstrukcije u ovom radu se neće razmatrati već će se brod promatrati kroz prosječnu brodsku konstrukciju u ovisnosti o vrsti broda.

Cilj ovog rada je objasniti dinamičku ravnotežu njihanja pomoću matematičkih formula. Međutim da bi razumjeli te formule, osim principa rješavanja važno je i poznavati dinamiku njihanja broda, a samim tim i prirodu morskih valova koji je uzrokuju.

Rad je sastavljen na način da nakon uvodnog dijela, slijedi drugo poglavlje koje se bavi matematikom u pomorstvu. U tom poglavlju objašnjava se zašto je matematika nezaobilazna grana u pomorstvu te njen utjecaj na pomorstvo kroz povijest i danas. U trećem poglavlju iznesene su osnove uporišne točke koje su bitne za stabilnost broda što ima direktan utjecaj na ponašanje broda na valovima. Četvrto poglavlje odnosi se na njihanje broda pri morskim valovima. Opisano je njihanje broda kao fizikalna pojava te vrste i obilježja morskih valova koji je uzrokuju. U petom poglavlju objašnjena je dinamička ravnoteža njihanja, jednadžbama njihanja koje uravnotežuju vanjske sile i momente koji djeluju na brod s unutrašnjim silama i momentima uslijed inercije. Šesto, zadnje poglavlje, odnosi se na zaključak u kome je dan kratak osvrt na obrađenu temu te su iznijeti osobni stavovi autora.

## **2. MATEMATIKA I POMORSTVO**

Upotreba matematike je neophodna za rješavanje problematike u tehničkim znanostima te pomorstvo kao jedna od grana tehničkih znanosti zahtjeva određene matematičke metode za rješavanje različitih problema unutar pomorstva. Kroz cijeli životni vijek broda matematika je primarno sredstvo za simuliranje i informiranje brodskih sustava i ljudstva na brodu što je neophodno za sigurnu plovidbu.

### **2.1. MATEMATIKA**

Matematika kao pojam je iznimno teško definirati, pa je određeni autori različito definiraju. Može se reći da je matematika prirodna znanost koja se bavi proučavanjem količine brojeva, strukture prostora i promjene. Koristeći nejasnoće i logiku, matematika je nastala iz brojenja, izračuna i mjerenja te sustavnog proučavanja oblika i kretnji fizičkih oblika. Ljudi se bave matematikom još od razdoblja prvih pisanih zapisa. Rješavanje matematičkih problema može zahtijevati godine neprekidnog rada. Međutim, definiranje matematike i nije od neke važnosti jer je sam pojam vrlo često u upotrebi te se na sam spomen tog pojma stvara svojstvena slika.

Matematika služi za izračun mnogih stvari u pomorstvu. Stabilitet broda, njihanje na valovima, financijski proračuni i primjena u navigaciji samo su dio problema koji se rješavaju uz pomoć matematike. Sigurnost broda u plovidbi, poboljšanje točnosti navigacije, optimiziranje troškova te kako brodovlasnicima i zaposlenicima u pomorstvu omogućiti veću zaradu i profit, samo su djelić pomorstva kojemu je nemoguće pristupiti bez znanja i primjene kako pomorstva tako i matematike.

Lakšim granama matematike koriste se svakodnevno svi ljudi. Matematika potiče ljudsko razmišljanje i logiku. Razvoj pomorstva teži da brodovi budu što veći, okretniji i brži. U postizanju tog cilja matematika ima značajnu ulogu. Može se reći da između pomorstva i matematike postoji neraskidiva veza.

## 2.2. GEOMETRIJA

Geometrija je grana matematike koja se bavi problemima oblika, veličine i odnosa među tijelima, te svojstvima prostora. Matematičar koji radi u polju geometrije naziva se geometar. Geometrija se javljala u mnogim ranim kulturama kao samostalna znanstvena disciplina o duljinama, površinama i volumenima, s elementima matematike koji su se pojavili na zapadu s Talesom.

Do trećeg stoljeća prije nove ere, geometrija je bila u aksiomatskom obliku kakvu ju je formirao Euklid, čiji je rad "Euklidova geometrija" zadala standarde za mnoge buduće naraštaje. Arhimed je zadao genijalne tehnike za izračun površine i volumena, čime je u mnogočemu prethodio današnjem integralnom računu. Polje astronomije, pogotovo zato što se veže uz prikazivanje položaja zvijezda i planeta na nebeskoj sferi opisivanjem međuodnosa i kretanja nebeskih tijela, služilo je kao važan izvor geometrijskih problema slijedećih tisuću i pet stotina godina.

Predstavljanjem koordinata René Descartes i konkurentni razvoj algebre označili su novi stadij za geometriju, s obzirom na to da su se od tada oblici kao što su ravninske krivulje mogli analitički prikazati u obliku funkcija i jednadžbi. Nadalje, teorija izgleda je dokazala da geometrija nije samo mjerenje svojstava tijela, te je postala porijeklo projekcijske geometrije. Subjekt geometrije je nadopunjen proučavanjem unutarnje strukture geometrijskih tijela koje su proizišle od Eulera i Gaussa i stvaranja diferencijalne geometrije.

Dok vizualna priroda geometriju čini pristupačnijom od drugih matematičkih grana kao što su algebra ili teorija brojeva, geometrijski jezik korišten u kontekstu se znatno razlikuje od onog izvornog. Geometrija se dijeli na planimetriju, stereometriju, trigonometriju, analitičku geometriju i diferencijalnu geometriju.

U navigaciji veliku važnost ima planimetrija koja proučava geometrijske likove u ravnini i njihove odnose. Klasični načini određivanja pozicije (azimuti, udaljenosti, horizontalni kutovi) upravo se temelje na problematici odnosa točaka u ravnini. Česta je upotreba sferne trigonometrije pri određivanju elemenata ortodromske plovidbe i izračuna elemenata astronomske stajnice.



## 2.3. TRIGONOMETRIJA

Trigonometrija je grana matematike koja proučava odnose između duljina i kutova u trokutima. Nastala je u trećem stoljeću prije nove ere iz geometrijskih proučavanja astronomskih predmeta.

Astronomi su tada prvi primijetili da postoji veza između duljina stranica pravokutnog trokuta i kutova između njih, a to je, ukoliko su poznati barem jedna stranica i jedan kut, vrijednosti svih ostalih stranica i kutova se mogu odrediti preko logaritama. Ovi izračuni su se uskoro definirali kao trigonometrijske funkcije.

Trigonometrija je najjednostavnije rečeno povezana sa pravokutnim trokutima. Mogućnost primjene na kosokutne trokute postoji, ali, s obzirom na to da se svaki nepravokutan trokut može podijeliti tako da se stvore dva pravokutna trokuta, većina problema se može smanjiti na izračune pravokutnih trokuta. Stoga se većina primjena odnosi na pravokutne trokute. Jedna iznimka ovog pravila je sferna trigonometrija, znanost koja proučava trokute na sferi, površini konstantne pozitivne zakrivljenosti, u eliptičnoj geometriji. Trigonometrija na površini s negativnom zakrivljenošću jest hiperbolična trigonometrija.

Broj primjena trigonometrija i trigonometrijskih funkcija je jako velik. Na primjer, tehnika triangulacije se koristi u astronomiji za mjerenje udaljenosti do bliskih zvijezda, u zemljopisu za mjerenje udaljenosti između znamenitosti te u sustavima satelitske navigacije. Funkcije sinusa i kosinusa su osnova teorije periodičnih funkcija kao što su one koje opisuju zvučne, svjetlosne valove, napon i sl.

Polja u kojima se koristi trigonometrija i trigonometrijske funkcije između ostalih su i astronomija, glazbena teorija, zvučna sinteza, akustika, optika, elektronika, teorija vjerojatnosti, statistika, biologija, medicina, farmacija, kemija, teorija brojeva, seizmologija, meteorologija, oceanografija, mnoge fizičke znanosti, geodezija, arhitektura, ekonomija, informatika i kartografija. U pomorstvu je, trigonometrija, najzastupljenija pri određivanju broda pomoću obalnih objekata (terestrička navigacija), a zastupljena je i u astronomskoj navigaciji i pri proračunima stabilnosti broda.

## **2.4. POMORSTVO**

Pomorstvo je djelatnost koja se može definirati u širem i užem smislu. U užem smislu pomorstvo je umijeće plovidbe i vještina upravljanja i manevriranja brodovima. U širem smislu pomorstvo obuhvaća sve djelatnosti vezane za iskorištavanje mora i morskog dobra na izravan i neizravan način. Djelatnosti kojih se pomorstvo dotiče su pomorska trgovina i brodarstvo, brodogradnja, aktivnosti u lukama, turizam, aktivnosti u ratnoj mornarici te održavanje lučke, kanalske i sigurnosne infrastrukture. Pored prethodno navedenih postoje mnoge djelatnosti koje ne bi bilo moguće izvoditi bez pomorstva; ribarstvo, marikultura, različite eksploatacije kao što su eksploatacija nafte i zemnog plina.

Osnovni preduvjet za postojanje pomorstva su vodeni putevi od kojih je najbitnije more. Ono povezuje sve kontinente te predstavlja najjeftiniji oblik transporta iz razloga što izgradnja infrastrukture za plovne puteve nije potrebna. Države koje ne posjeduju izlaz na more na različite su načine ovisne o državama koje to imaju te pravo korištenja tranzitnih luka nastoje osigurati što boljim ugovorima.

Pomorstvo uključuje poznavanje različitih aktivnosti i razvijanje specijaliziranih vještina kao što je navigacija. Potrebno je poznavati međunarodni pomorski zakonik, vrijeme, meteorologiju i prognozu vremena, rukovanje brodovima i čamcima, rukovanje sa opremom na palubi, sidrima i kablovima, rad sa konopcima, motorima, komunikacije, jedrenje, preživljavanje na moru, traženje i spašavanje. Također, od bitnih aktivnosti na brodu, valja spomenuti i rukovanje opremom te opasnim teretima, vladanje izvanrednim situacijama, a osobito obranu od požara.

### **2.4.1. Povijest pomorstva**

Od nastanka čovječanstva postojala je potreba ljudi da koriste more i obalni prostor. Prema nekim arheološkim nalazima prvi jednostavni čamci nastali su u vremenu neolitika. Kronološki razvoj pomorstva može se podijeliti u četiri faze: prva faza predstavlja pomorstvo starog vijeka, od prvih početaka do 6. stoljeća, druga faza obuhvaća pomorstvo srednjeg vijeka od 6. do 15. stoljeća, treća faza je doba velikih geografskih otkrića od 15. do 19. stoljeća, te suvremeno doba pomorstva od 19. stoljeća do danas.

Prve stare civilizacije koje su razvijale pomorstvo bili su Egipćani, Feničani, Krećani i Grci. Nakon njih znatnu ulogu odigrali su Rimljani koji su jedini u povijesti uspjeli kontrolirati cijelo Sredozemlje. Tada započinje razvoj pomorske trgovine, brodogradnje i ribarstva, a najutjecajnija luka tog doba bila je Aleksandrija. U starom vijeku postojali su trgovački brodovi koji su se kretali uz pomoć snage vjetra te ratni brodovi koji su pokretani veslima. Tijekom srednjeg vijeka, a osobito nakon otkrića kompasa, pomorstvo doživljava procvat. Plovidba se uglavnom temeljila na poznavanju oceanografskih obilježja te geografskih značajki obale uz pomoć portolana. Za vrijeme velikih geografskih otkrića, centar europskog i svjetskog pomorstva pomiče se sa Sredozemlja na Atlantik. Po svijetu se osnivaju prve portugalske i španjolske kolonije što dovodi do razvoja interkontinentalne veze koja mijenja gospodarsku i društvenu sliku svijeta te potiče velike migracije stanovništva.

Što se tiče povijesti hrvatskog pomorstva važno je spomenuti Dubrovačku republiku koja je u 16. stoljeću imala značajnu ulogu u pomorskom životu Europe. Već u 8. stoljeću Dubrovčani su sagradili prvu galiju, a tijekom 10. i 11. stoljeća sudjelovali su raznim pomorskim bitkama.

#### **2.4.2. Razvoj modernog pomorstva**

Pri samim počecima razvoja pomorstva glavni su ciljevi bili pronaći što kraće i sigurnije pomorske rute te na što pouzdaniji način odrediti geografski položaj i ostale važne komponente orijentacije i navigacije. Jedan od glavnih problema na čijem su rješavanju bili angažirani svi vodeći europski znanstvenici bilo je određivanje geografske dužine s izravnom primjenom u pomorstvu. Ovaj problem je u potpunosti riješen tek nakon što je 1728. godine John Harrison izumio kronometar, sat koji je dovoljno precizan da bi se koristio kao prijenosni vremenski standard na vozilima, u ovome slučaju na brodu. Veliki naponi uloženi su pri pronalasku sjeverozapadnog i sjeveroistočnog prolaza Sjevernim ledenim morem kojima bi se skratila veza između Europe i Dalekog Istoka te pacifičkih obala Sjeverne Amerike. Iako su spoznaje o geografskim i oceanografskim značajkama novootkrivenih prostora bile znatno veće, temeljna tehnologija pomorskog prometa se nije mijenjala tisućljećima; osnovno sredstvo bili su brodovi pokretani jedrima.

Industrijska revolucija označena je izgradnjom i primjenom brodova pokretanih na parni pogon. Brodovi na parni pogon postupno zamjenjuju jedrenjake zbog boljih manevarskih sposobnosti i veće nosivosti, a od 1827. godine primjenjuje se i brodski vijak tj. brodski propeler. Veliko značenje za razvoj pomorstva, kakvo je danas, imalo je otvaranje Sueskog kanala 1869. godine te izgradnja Panamskog kanala 1914. godine. Parobrodarstvo je omogućilo uspostavljanje redovitih i razmjerno brzih međukontinentalnih veza u putničkom i robnom prometu. Uz slobodnu ili trampersku plovidbu razvija se i linijska plovidba koja posebno utječe na gospodarsko ujedinjenje pojedinih dijelova obale. Veliki napredak ostvaren je i u putničkom pomorskom prometu. U 20. stoljeću brodove na parni pogon postupno zamjenjuju brodovi pokretani dizelskim motorima, a od sredine 20. stoljeća pojedini ratni brodovi i ledolomci pokretani su motorima na nuklearni pogon.

Tijekom 20. stoljeća robni promet naglo raste, a posebno transport sirovina kao što su nafta, ugljen i željezna ruda. Zbog toga se grade sve veći brodovi, posebice tankeri i brodovi za prijevoz rasutog tereta čija nosivost prelazi 50 0000 dwt. Danas, kada tehnologija napreduje iz dana u dan, primjenjuju se nove tehnike, razvija se integralni i multimodalni transport, grade se različiti specijalizirani brodovi za prijevoz generalnog tereta (kontejnerski, RO-RO brodovi, LASH brodovi). U skladu s time mijenjaju se i luke i terminali.

Obuka pomoraca kroz stoljeća odvijala se na način da su stariji i iskusniji kapetani podučavali mlade pomorce nautici i svemu ostalom potrebnom za uspješnu plovidbu i upravljanje brodom. Danas se to odvija u specijaliziranim školama i na fakultetima, te zbog povećanih standarda nije moguće aktivno sudjelovati u plovidbi ako se ne steknu adekvatne svjedodžbe o osposobljenosti koje moraju biti u skladu sa različitim međunarodnim konvencijama.

### 3. ELEMENTI STABILNOSTI BRODA

Stabilnost broda može se definirat kao sila koja se odupire vanjskim silama da brod dovede u početno stanje. Poprečna stabilnost broda je važnija nego uzdužna jer je pri poprečnim gibanjima smanjen otpor te je i površina, koju tlači hidrostatski tlak, manja.

#### 3.1. TOČKE UPORIŠTA BRODA

Kad se brod nalazi u uspravnom položaju ove se točke nalaze u liniji jedna ispod druge i brod pliva po zakonu plovnosti. Težište istisnine ili uzgona (engl. *Center of buoyancy* - B) je zamišljena točka u kojoj su koncentrirane sve sile uzgona uronjenog dijela broda koje djeluju prema gore okomito na vodenu liniju. Kad brod pliva u uspravnom položaju sile uzgona ravnomjerno djeluju na uronjeni dio broda pa se težište istisnine nalazi u uzdužnici ili simetrali broda. Ako se brod iz bilo kojeg razloga nagne, na strani nagiba povećava se volumen uronjenog dijela broda a na strani suprotnoj od nagiba taj volumen se smanjuje pa se zbog toga težište istisnine B iz simetrale pomiče u novo težište istisnine uronjenog dijela broda  $B_1$ .

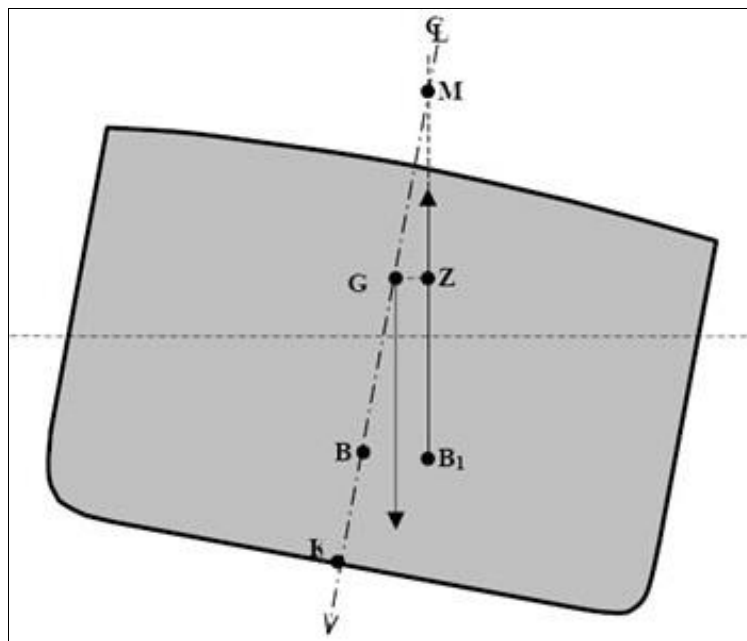
Zaključuje se da položaj težišta B u odnosu na kobilicu (K) ovisi i o obliku podvodnog (uronjenog) dijela broda odnosno o njegovom gasu. Za praktičnu upotrebu na brodu, udaljenost (u metrima) težišta uzgona od kobilice (KB) nalazi se u dijagramnom listu u obliku hidrostatske krivulje ili u tablicama u koje se ulazi sa vrijednošću srednjeg gasa.

Istisnina odnosno istisnuta težina vode odgovara vlastitoj težini broda. Volumen prostora iznad vodene linije naziva se rezervnim uzgonom. Ukrcajem dodatnih težina, brod uranja, povećava se deplasman ali se smanjuje volumen iznad vodene linije a time i rezervni uzgon broda. Rezervni uzgon glavni je parametar u dodjeljivanju visine nadvođa brodu (minimalno nadvođe – maksimalni gas).

Sustavno težište ili težište težina (engl. *Center of gravity*- G) broda je zamišljena točka u kojoj su koncentrirane sve težine te iz koje sve sile težina djeluju okomito na vodenu liniju prema dolje. Kod broda u uspravnom položaju u poprečnom smislu težište se nalazi na

polovini njegove širine i u simetrali jer brod ima simetričan oblik, ali u uzdužnom smislu brod nije simetričan (prednji dio od glavnog rebra ili sredine nije jednak stražnjem dijelu) pa sistemno težište  $G$  može biti ispred ili iza glavnog rebra što ovisi o uzdužnom rasporedu pojedinih težina na brodu. Svaka promjena težina (ukrcaj, iskrcaj, pomak) izazvat će i promjenu položaja sistemnog težišta  $G$  u sva tri smjera (po visini, po dužini, po širini-bočno).

Položaj sistemnog težišta ( $G$ ) po visini određen je njegovom udaljenošću od kobilice ( $K$ ) i ta se udaljenost izražava u metrima. Kad brod izađe iz brodogradilišta prvo određivanje visine točke  $G$  vrši brodogradilište i ono se naziva  $KG$  praznog broda (engl. *Light ship*). U svakodnevnom brodskom poslovanju (ukrcaj-iskrcaj težina) visinu sustavnog težišta određuje časnik broda postupkom koji se naziva račun centracije. Početni metacentar ( $M$ ) je točka koja se nalazi iznad točke  $G$  tj. iznad centra sustavnog težišta. Položaj točke  $M$  koji uvijek mora biti iznad točke  $G$  preduvjet je zadovoljenja trećeg uvjeta plovnosti.



**Slika 1. Točke stabilnosti [16]**

Položaj početnog metacentra  $M$  određen je njegovom udaljenosti od kobilice i označava se sa  $KM$ . Ovaj podatak vezan je za brodsku formu (gaz ili deplasman) pa je njegov položaj određen već u brodogradilištu a na brodu ga očitavamo iz dijagramnog lista ili tablica u koje uđemo sa srednjim gazom. Uslijed djelovanja vanjskih sila (vjetar, valovi) kad se brod nagne za određeni kut, njegov podvodni volumen mijenja oblik pa se točka  $B$  pomiče u točku

B1. Sila uzgona sada djeluje iz točke B1 okomito na vodenu liniju. Presjecište smjera sile uzgona i simetrale broda naziva se prividni metacentar (M).

### **3.2. MOMENT STATIČKE STABILNOSTI**

Uslijed djelovanja neke vanjske sile brod se nagnje što uzrokuje poremećaj stabilne ravnoteže. Brod se odupire takvom poremećaju ravnoteže i nastoji se vratiti u uspravan položaj čim prestane djelovanje sile koja je taj poremećaj izazvala. Ako se brod nagne (zbog utjecaja vanjske sile) za neki kut došlo je do promjene oblika podvodnog dijela broda pa se težište istisnine (B) pomiče u B1.

Sila istisnine djeluje iz B1 prema gore, okomito na vodenu liniju. Točka u kojoj smjer sile istisnine siječe uzdužnu simetralu broda naziva se metacentar (M). Težište broda (sistemno težište G) prema uvjetu plovnosti nalazi se ispod točke M. Sila težina koja predstavlja ukupnu težinu broda tj. deplasman djeluje iz točke G prema dolje također okomito u odnosu na vodenu liniju broda. Linija povučena iz točke G paralelno sa vodenom linijom a okomito na smjer sile uzgona siječe taj smjer u točki Z.

U ovakvu nagnutu položaju broda nastaje spreg sile i to sile uzgona U i sile težina (deplasmana) D koje prema prvom uvjetu plovnosti moraju biti jednake ali djeluju u suprotnim smjerovima. Spreg sile uzrokom je nastajanja momenta koji se protivi nagnjanju broda i vratit će brod u uspravan položaj čim prestane djelovanje sile koja je nagib izazvala. Moment vanjske sile naziva se prekretni moment, a moment sprega sile uzgona i težine broda koji se suprotstavlja nagibanju zovemo moment statičke stabilnosti broda (Mst).

### **3.3. DINAMIČKA STABILNOST**

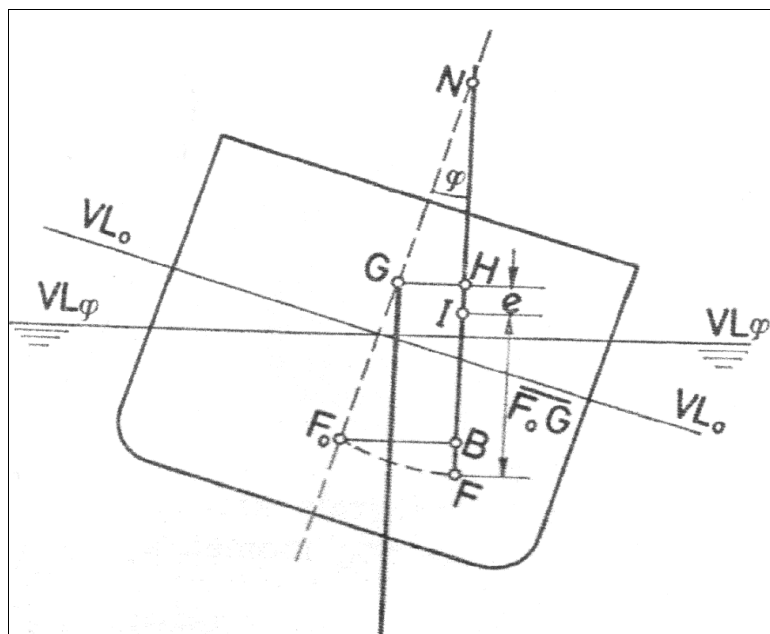
Pojam dinamičke stabilnosti broda kao rezultat momenata na brod vezuje se za one momente i sile koje djeluju na brod a čije se vrijednosti naglo mijenjaju. Naglim mijenjanjem takvih momenata na brod dolazi do ubrzanja masa pa odatle pojam dinamičkog djelovanja sile a onda i pojavljivanje dinamičke stabilnost broda. Naglu promjenu momenata na brod može

prouzrokovati nagla promjena intenziteta vjetra, mora ali i opterećenje broda ukranim teretom ili pak prodor vode.

Zbog nastalog ubrzanja brod dobiva određenu brzinu gibanja koja se sve više povećava i to sve dok je nagibni moment veći od momenta statičke stabilnosti tj. do kuta nagiba broda pod kojim se ove dvije krivulje sijeku odnosno gdje se vrijednosti dinamičkog i statičkog stabilnosa izjednačavaju.

U tom trenutku, a zbog kinetičke energije, brod se neće zaustaviti u tom položaju nego će nastaviti svoje gibanje do drugog kuta nagiba trošeći kinetičku energiju zbog radnje momenta nagiba u svrhu svladavanja momenta statičke stabilnosti. Pri kutu drugog nagiba izjednačava se radnja prekretnog momenta s radnjom momenta statičke stabilnosti.

Za svladavanje kinetičke energije broda prouzrokovane dinamičkim djelovanjem vanjskih sila značajna je upravo površina ispod krivulje statičke stabilnosti a ta površina predstavlja rad momenta statičke stabilnosti. Rad momenta statičke stabilnosti naziva se dinamička stabilnost broda. Pri dinamičkom djelovanju sila brod se može, u krajnjem slučaju, nagnuti sve dok postoji pozitivna površina ispod krivulje statičke stabilnosti, a taj kut odgovara maksimalnom opsegu statičkog stabilnosa.



Slika 2. Točke uporišta pri utjecaju dinamičkih sila [9]



Pri dinamičkom djelovanju prekretnog momenta brod se prevrće tek onda kad nestane rezervne dinamičke stabilnosti predstavljene površinom između krivulje statičke i dinamičke stabilnosti. Kut kod kojeg se to dešava naziva se dinamički kut prevrtanja broda. On je vrlo blizu ili je jednak kutu kod kojeg krivulja GH (statičkog stabiliteta) sječe apcisu te iz pozitivnog prelazi u negativno područje. To je i kut opsega statičke stabilnosti. Dinamička stabilnost broda je dakle radnja koju obavlja moment statičke stabilnosti pri naginjanju broda.

Ta radnja se može izraziti kao umnožak deplasmana broda i razlike udaljenosti težišta istisnine i sistemnog težišta pri uspravnom i nagnutom položaju broda ( $e$ ). Udaljenost težišta istisnine od sistemnog težišta pri uspravnom brodu je  $F_0G$ , a kod nagnutog  $FH$ . Rad statičke stabilnosti odnosno dinamičke stabilnosti izražen je kao nagibni (prekretni) moment koji pri naginjanju broda obavi rad koji je potreban da se cijela masa broda ( $D$ ) podigne za visinu  $e$ . Put dinamičke stabilnost prikazan je dužinom  $HI$  što odgovara vrijednosti  $e$ . Mjerna jedinica za dinamičku stabilnost je tona/metar. Dinamička stabilnost objašnjava utjecaj nekog stalno nagibajućeg momenta (tlak vjetra, presipanje žita) spram momenata koji djeluje dinamično (vjetar na mahove). [9]

## **4. NJIHANJE BRODA NA VALOVIMA**

Njihanje broda uzrokuje kinetička energija koju nailazni val prenosi na brod prilikom međusobnog kontakta. Određeni dio energije se utroši na prigušivanje vala o trup broda tzv. disfrakcija (raspršivanje) čiji rezultat je promjena smjera i visine vala, dok se dio energije prenosi na brod što rezultira njihanjem broda. Preostali dio energije nastavlja se kretati u smjeru gibanja vala. Difrakcijski val zadržava valnu duljinu odnosno frekvenciju i nakon susreta s brodom. Energija vala predana brodu, osim što uzrokuje njihanje broda, sastoji se od energije inercijskih sila, energije povratnih sila nastalih pomakom tijela iz ravnotežnog položaja te energije valova koji se šire oko broda prilikom njihanja tj. valova radijacije.

Kinetička energija radijacijskih valova rezultira prigušenje njihanja broda s činjenicom da brod predaje dio energije samim njihanjem te na taj način povećava težinu broda povećanjem kinetičke energije (prividno povećanje zbog gibanja). Hidrodinamička dodatna masa broda odnosi se na postojanje dodatne sile koje ubrzava okolnu vodu i trup broda prilikom njihanja, a koja je u fazi s ubrzanjem njihanja tijela. Primjerice pri višim frekvencijama poniranja dodatna masa postaje gotovo jednaka masi broda. [3]

Sasvim je logično da brod pri plovidbi ne nailazi na pravilne valove. Ipak, njihanje broda na pravilnim valovima spada u najvažnija poglavlja pomorstvenosti jer predstavlja jedan relativno jednostavan način određivanja njihanja broda u nevremenu kao i efekata tih njihanja. [4]

### **4.1. PODJELA I KARAKTERISTIKE MORSKIH VALOVA**

Prijenosi mehaničke ili kinetičke energije na more, u obliku valova, mogu biti različiti te se tada govori o načinu nastajanja vala. Da bi se razumjeli efekti njihanja broda na valovima odnosno ponašanje broda pri nevremenu, najprije je potrebno razumjeti nastanak i djelovanje morskih valova. Valovi mogu nastati plovidbom broda. Takvi valovi se nazivaju razilazni dok se valovi nastali njihanjem plovnog objekta nazivaju valovi potencijalnog prigušenja. Kinetička energija vjetra može biti prenesena na morsku površinu pa se tada govori o vjetrenim valovima.

Valovi koji su nastali zbog utjecaja gravitacije Sunca i Mjeseca nazivaju se plimni valovi koji uzrokuju oscilacije morske razine (morske mijene). Najmasivniji su valovi koji su nastali zbog potresa ili pomicanja zemljinih slojeva na dnu mora tzv. tektonski valovi. Također postoje još neke vrste valova koje su u praksi rijetke pa će se zanemariti. Najvažniji valovi od gore navedenih su vjetroviti valovi jer se najčešće pojavljuju i nerijetko su pogubni za brodove i druge objekte na moru.

Jednostavno matematičko rješenje za sve vrste nabrojanih valova jednostavno ne postoji. Neke je valove nemoguće čak i predvidjeti. To je poznato za valove koji nastaju nakon potresa (tsunami). Od svih nabrojanih vrsta valova brod se mora projektirati tako da izdrži njihanja na vjetrovnim valovima. Visine vjetrovnih valova mogu poprimati začuđujuće visoke vrijednosti. Više od 20 do 25 metara zabilježene su valne visine za vrijeme trajanja orkanske oluje, zimi na Sjevernom Atlantiku.

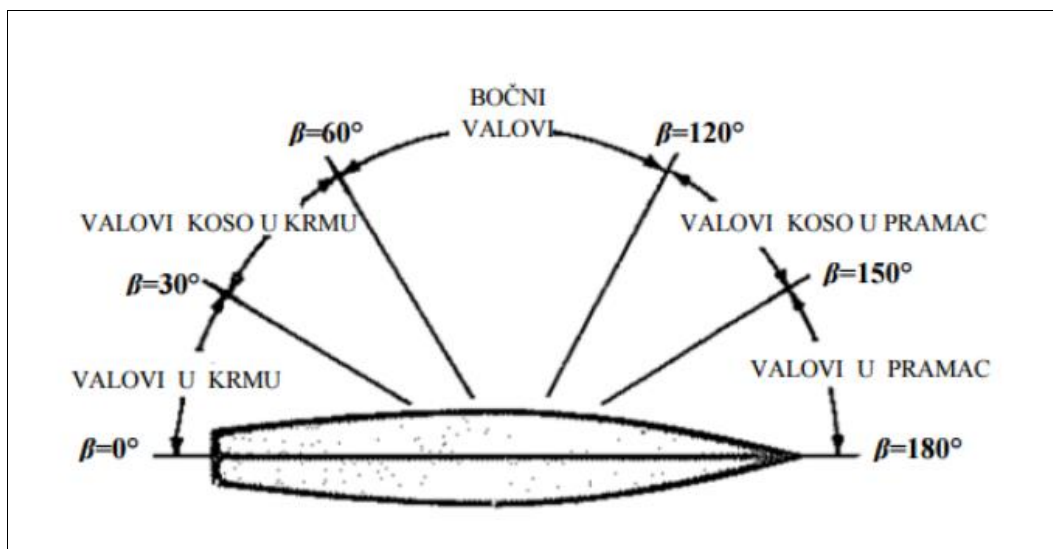
Valovi stvoreni djelovanjem vjetra na morskoj površini mogu se podijeliti u dvije grupe: valovi živog mora (živo more) i valovi mrtvog mora (mrtvo more).

Valovi živog mora nastaju uslijed djelovanja vjetra na morskoj površini. Uslijed djelovanja vjetra dolazi do promjena tlaka zraka na morskoj površini. Na mjestu sniženog tlaka zraka uzdiže se stupac vode koji se zatim prenosi s jednog mjesta na drugo. Promatranjem valova lako se da uočiti da se masa vode ne pokreće u horizontalnoj ravnini, već samo u vertikalnom smjeru što znači da se prenosi stupac vode. Vjetrovni valovi su izrazito nepravilni, odnosno stalno im se mijenjaju periodi i duljine.

Valovi mrtvog mora su valovi koji su nastali u području u kojem postoji lokalni vjetar, a pristižu u drugo područje u kojem ili nema vjetra ili su razvijeni valovi zbog puhanja vjetra drugog smjera. Valovi mrtvog mora ne ovise više o vjetru – kada su jednom apsorbirali energiju vjetra oni se šire dok ne zamru uslijed prigušenja. Ovi valovi su duljeg brijega i također su i pravilniji od vjetrovnih valova. [4]

### 4.1.1. Frekvencija i susretni kut valova

Frekvencija tijela koje se njiše i koja napreduje na valovima nije jednaka frekvenciji valova. Frekvencija tijela ovisi o brzini broda i kutu pod kojim brod nailazi na valove, a ne samo o frekvenciji valova. Ako brod plovi u smjeru napredovanja valova period susretanja ili susretni period bit će veći od perioda valova, a frekvencija susretanja ili susretna frekvencija bit će manja od frekvencije valova. Ukoliko valovi dolaze s boka neće biti razlike između valne i susretne frekvencije. Susretni ili kursni kut  $\beta$  je kut pod kojim valovi nadolaze na brod, a definira se kao kut koji zatvaraju vektor brzine broda i vektora brzine vala. [1]



Slika 3. Kursni ili susretni kut [2]

### 4.2. PARAMETRI MORSKOG VALA

Slika 4. pokazuje snimak morskog vala u nekom trenutku, a slika 5. pokazuje izmjereni poremećaj u određenoj točki tijekom nekog vremenskog perioda. Oznake na slikama su:

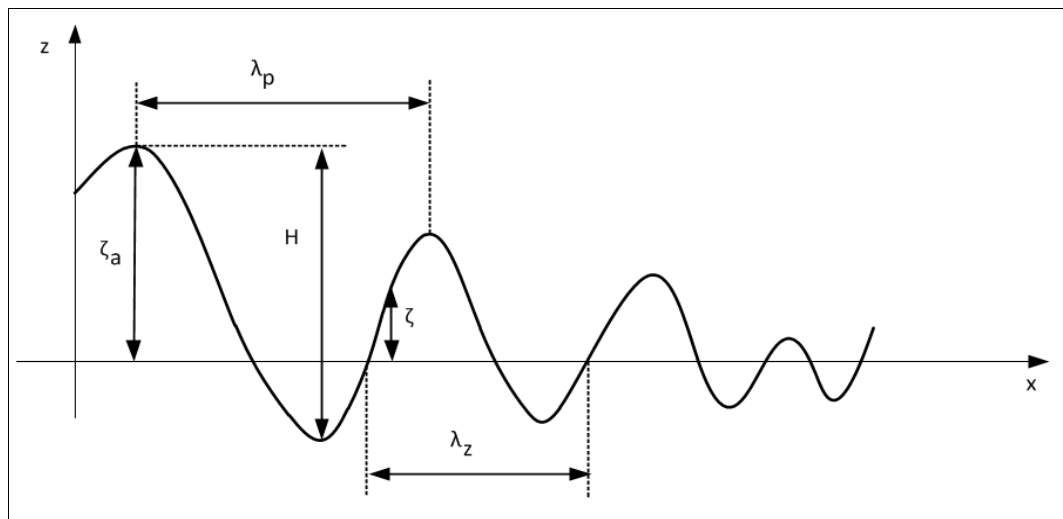
- $\zeta_a$  – valna amplituda – vertikalna udaljenost brijega ili dola vala od srednje razine vode,
- $H$  – valna visina – vertikalna udaljenost uzastopnog brijega i dola,
- $\lambda_p$  – valna duljina između vrhova (vršna valna duljina) – horizontalna udaljenost između dva uzastopna brijega ili dola,

$\lambda_z$  – valna duljina nultog presjeka (nulta valna duljina) – horizontalna udaljenost između dvije uzastopne nul točke,

$T_p$  – valni period između vrhova (vršni period) – vremenski interval između dva uzastopna brijega ili dola,

$T_z$  – valni period nultog presjeka (nulti period) – vremenski interval između dvije nul točke u padu ili rastu.

Gore navedene vrijednosti nemaju veliku praktičnu vrijednost jer ih ima mnogo (koliko i valova). Odnose se samo na određeni snimak vala u nekom trenutku.

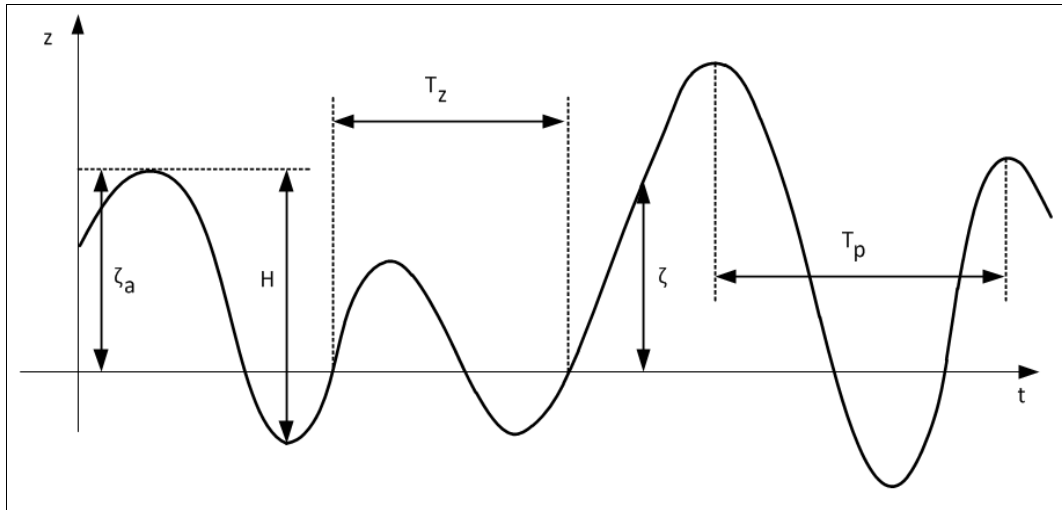


**Slika 4. Snimak vala u trenutku  $t$**

Globalne značajke određenog signala primjerenije se definiraju srednjim vrijednostima gornjih veličina, odnosno određuju se sljedeće vrijednosti:

- $\bar{\zeta}_a$  – srednja valna amplituda – srednja vertikalna udaljenost brijega ili dola vala od srednje razine vode,
- $\bar{H}$  – srednja valna visina – srednja vertikalna udaljenost uzastopnog brijega i dola,
- $\bar{\lambda}_p$  – srednja valna duljina između vrhova – srednja horizontalna udaljenost između dva uzastopna brijega ili dola,
- $\bar{\lambda}_z$  – srednja valna duljina nultog presjeka – srednja horizontalna udaljenost između dvije uzastopne nul točke u padu ili rastu,

- $\bar{T}_p$  – srednji valni period između vrhova – srednji vremenski interval između dva uzastopna brijega ili dola,
- $\bar{T}_z$  – srednji valni period nultog presjeka – srednji vremenski interval između dvije nul točke u padu ili rastu.



**Slika 5. Snimak vala u točki  $x$**

Na osnovi ovih vrijednosti moguće je uspoređivati različite valne procese odnosno osnovna svojstva određenog valnog poremećaja. [2]

Vjetroviti valovi (naročito valovi živog mora) su uglavnom vrlo nepravilni te ih je skoro nemoguće matematički točno opisati i predvidjeti njihov profil u realnom vremenu kao što je gore prikazano. Međutim, moguće je saznati svojstva tih valova (visinu i period) te ih nastojati što točnije aproksimirati tako da odgovaraju u nekom smislu. Dakle, nepravilni valovi mogu se razmatrati kao skup regularnih valova koji pojedinačno djeluju na brod i od kojih svaki val ima svoju visinu, duljinu, period ili frekvenciju i smjer.

Takav koncept omogućuje značajno pojednostavljenje problema odnosno omogućuje sagledavanje kompleksnog problema primjenom mnogo jednostavnije teorije regularnih valova. To znači da je za analiziranje kompleksnih valnih sustava dovoljno poznavati svojstva jednostavnih harmonijskih valova. Značajan doprinos ovoj teoriji dali su St. Denis i Pierson metodom superpozicije. [4]

### 4.3. NJIHANJE BRODA NA HARMONIJSKIM VALOVIMA

Naziv harmonijski valovi odnosi se na periodično ponavljanje valnih obilježja u vremenu i prostoru. Prilikom dizajniranja trupa glavni cilj bi trebao biti dobro držanje broda na morskim valovima. Složen problem predviđanja njihanja i dinamičkih opterećenja broda riješen je na način koji omogućuje primjenu u postupku projektiranja.

Važnost reduciranja njihanja broda i minimizacije opterećenja na valovima naročito je došla do izražaja prilikom projektiranja brzih kontejnerskih brodova i tankera velikih dimenzija. Na tom području tijekom zadnjih par desetljeća postiže se značajan napredak. Veliki doprinos na području pomorstvenosti dali su St. Denis i Pierson primjenom principa superpozicije na njihanje broda. Njihova je hipoteza da odziv broda na morskim valovima može biti prikazan kao suma odziva na harmonijskim valovima različitih frekvencija. Njihova teorija potvrđena je i prihvaćena u području pomorstvenosti broda, posebice za vertikalna oscilacijska gibanja i opterećenja. Uz pretpostavku da je princip superpozicije valjan i za horizontalne odzive, složen se problem prognoze njihanja i opterećenja broda na moru može svesti na dva osnovna problema:

- Prognozu njihanja i opterećenja broda na harmonijskim valovima,
- Statističku prognozu odziva na morskim valovima.

Ako je odziv broda na harmonijskim valovima poznat, za određivanje statističkih parametara odziva za određeno stanje mora postojati raspoloživi postupci koji slijede St. Denis i Piersonovu metodu. Međutim, najsloženiji je problem analize pomorstvenih značajki određivanje njihanja i opterećenja broda na harmonijskim valovima. Salvesen, Tuck, i Faltinsen izveli su numerički postupak dovoljne inženjerske točnosti za predviđanje zalijetanja, poniranja, posrtanja, zanošenja, ljuljanja i zaošijanja, kao i smičnih sila, momenata savijanja i torzije za brod koji napreduje stalnom brzinom i proizvoljnim smjerom na harmonijskim valovima.

Teorija njihanja i opterećenja, uz dostupne statističke metode, može inženjeru brodogradnje poslužiti kao korisno sredstvo za određivanje pomorstvenih značajki broda. Poznaje li se geometrijski opis trupa i raspored masa na brodu uz informacije o morskom

okolišu, moguće je približno procijeniti njihanja i dinamička opterećenja broda na morskim valovima te ih usporediti s novim kriterijima temeljenim na dinamičkim značajkama broda. [4]

Pri razmatranju njihanja broda na valovima polazi se od pretpostavke da je brod kruto tijelo, odnosno drugim riječima pretpostavlja se da elastični harmonijski pomaci trupa nemaju velikog utjecaja na njihanja broda. Prema tome dinamika krutog tijela i njihanja fluida nastaju kombiniranim djelovanjem različitih vanjskih sila i momenata kao i tromosti samog tijela. [1]

Sasvim je logično da brod pri plovidbi ne nailazi na pravilne valove. Ako se to ponekad i dogodi naprimjer pri prolasku valova mrtvog mora ili razizlaznih valova koji ostaju iza nekog drugog broda, previše je rijetko da bi zahtijevalo detaljniju analizu. Ipak, njihanje broda na pravilnim valovima spada u najvažnija poglavlja pomorstvenosti jer predstavlja jedan relativno jednostavan način određivanja njihanja broda u nevremenu kao i efekata tih njihanja. [4]

#### **4.3.1. Model njihanja broda**

Model je sredstvo za opisivanje nekog realnog sustava u određenim uglavnom umanjenim veličinama i često idealiziranim karakteristikama. U modeliranju odziva broda na valovima, valovi su modelirani u bazenu gdje se nalazi model broda kojeg se proučava. Val, čiji je model predočen u obliku harmonijskog progresivnog vala, prilikom sudara s brodom predaje dio svoje energije brodu, a dio energije će nastaviti napredovanje zajedno s valom.

Iz razloga što se brod gleda kao kruto tijelo, predana energija pretvorit će se u energiju njihanja što će uzrokovati oscilacijsko gibanje, odnosno njihanje te emitiranje energije koja se radijalno širi u svim horizontalnim smjerovima. Taj je dio energije jednak razlici energije vala prije i nakon sudara s brodom. Nakon sudara s brodom val će se promijeniti, a njegova će energija biti manja od početne. Prema "Zakonu očuvanja energije" energija ne može nestati pa će njena razlika prije i poslije sudara biti utrošena na:

- stvaranje nove valne komponente i
- energiju njihanja broda.



Val je doživio promjenu koja se, osim u pojavi nove komponente, očituje i na smanjenju njegove visine, dok je duljina vala ostala ista (period i frekvencija vala ostali su nepromijenjeni). Ta se promjena naziva difrakcija ili lom. Pod pretpostavkom da su elastične deformacije broda zanemarive, razlika energije nailaznog vala i njegova oblika nakon sudara s brodom u ravnoteži je s ostalim komponentama nastalim njihanjem broda, a to su:

- energija inercijskih sila mase broda,
- energija uslijed rada povratnih sila nastalih pomakom broda iz ravnotežnog položaja,
- energija valova radijacije koji se šire od broda.

U cijelom modelu koji opisuje njihanje broda na valu posebnu ulogu ima energija radijacijskih valova koja se očituje kao:

- stišavanje (prigušivanje) njihanja broda,
- prividno povećanje mase broda prilikom njihanja.

Periodično ponavljanje prijenosa energije, između sustava progresivnih harmonijskih valova i broda u plovidbi, rezultirat će oscilacijskim gibanjem ili njihanjem broda, u općem slučaju sa šest stupnjeva slobode pomaka, odgovarajuće brzine i ubrzanja.

Kao posljedica njihanja pojavljuju se hidrodinamičke i hidrostatičke sile. Hidrostatičke sile vraćaju tijelo u početno stanje pa se nazivaju povratnim silama, odnosno momentima. Hidrodinamičke sile prigušuju nastalo oscilacijsko gibanje. Budući da je jedan dio tih sila u fazi s ubrzanjem, a drugi dio u fazi s brzinom njihanja, manifestiraju se kao efektivno povećanje mase tijela i stišavanje (prigušenje) njihanja, a zbog prirode njihovog djelovanja nazivaju se hidrodinamičkom reakcijom.

Njihanje tijela pod djelovanjem morskih valova zbiva se na granici dvaju medija – tekućine i atmosfere. Razlika u gustoći tih dvaju medija je velika (oko 800 puta) pa je mehanizam njihanja vrlo složene prirode. Nužno je pojednostavniti opis pojave uvođenjem niza pretpostavki te reducirati problem na fizikalni model one razine složenostiza čiji opis postoji odgovarajući matematički izraz, odnosno matematički interpretirati fizikalni model njihanja. Najbitnija pretpostavka, koja omogućuje razlaganje problema u niz jednostavnijih i analizi dostupnijih, jest pretpostavka linearnosti prisutnih fenomena i mogućnosti superpozicije pojedinih sila odnosno momenata. Ta pretpostavka implicitno uključuje

prepostavku malih valnih amplituda  $\zeta_a$  i malih amplituda njihanja  $\eta_j$  ( $j = 1, \dots, 6$ ). Također je važno spomenuti i ostale prepostavke a to su:

- tekućina je idealna (nestlačiva i neviskozna),
- napestost slobodne površine je zanemarena,
- strujanje u tekućini je bezvrtložno (potencijalno strujanje),
- strujanje oko uronjenog tijela razmatra se u njegovom srednjem poloaju koji odgovara mirovanju u mirnoj tekućini,
- harmonijski progresivni val je ravninski, a ravnina njegova rasprostiranja zatvara proizvoljan kut  $\beta$  s uzdužnom osi uronjena tijela. [2]

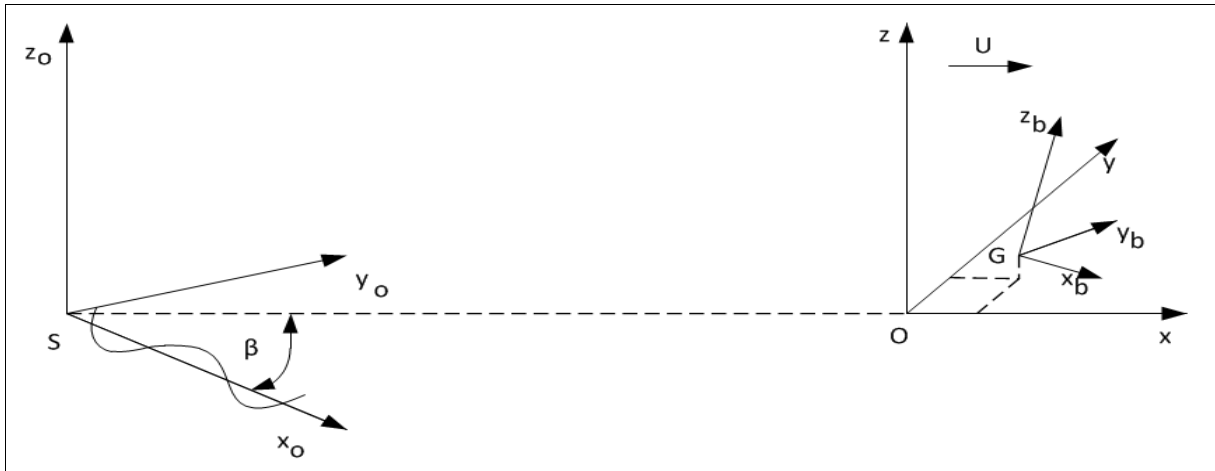
#### 4.3.2. Koordinatni sustavi

Jednadžbe njihanja vrijede pod pretpostavkom da se brod giba na harmonijskim valovima na kojima napreduje konstantnom brzinom  $U$  i proizvoljnim smjerom koji s smjerom valova zatvara kut  $\beta$ . Oscilacijsko gibanje ili njihanje broda, kao i svakog drugog krutog tijela, može se prikazati pomoću tri translacije težišta tijela i tri rotacije oko težišta. Da bi se opisalo djelovanje vala na brod te njihanje kao posljedica tog djelovanja, potrebno je definirati određene koordinatne sustave.

Nepomični koordinatni sustav (fiksni, inercijski)  $S(x_0, y_0, z_0)$  vezan je za Zemlju. Ravnina  $x_0 y_0$  leži na mirnoj slobodnoj površini, pozitivan smjer osi  $x_0$  je u smjeru napredovanja vala, a može biti i zakrenut u smjeru napredovanja broda. Os  $z_0$  je usmjerena vertikalno gore.

Koordinatni sustav broda  $G(x_b, y_b, z_b)$  vezan je za brod a ishodište mu je u težištu broda  $G$ . Os  $x_b$  leži u smjeru uzdužne simetrale broda a usmjerena je prema pramcu broda, odnosno u smjeru napredovanja. Os  $y_b$  je usmjerena prema lijevom boku broda, dok je os  $z_b$  okomita na ravninu  $x_b y_b$  s pozitivnim smjerom prema gore. [2]

Translatirajući koordinatni sustav  $O(x, y, z)$  kreće se brzinom broda  $U$ . Ako brod miruje smjerovi osi koordinatnog  $O(x, y, z)$  jednaki su onima kod koordinatnog sustava broda  $G(x_b, y_b, z_b)$ . Ravnina  $x y$  leži na mirnoj slobodnoj površini. [2]



Slika 6. Koordinatni sustavi

#### 4.4. OBLICI NJIHANJA

Oscilacijsko gibanje broda odnosno njihanje  $\eta_j(t)$  opisano je zakonom koji se prikazuje u kompleksnom obliku:

$$\eta_j(t) = \text{Re}\{\delta_j e^{-i\omega_e t}\} = \eta_{aj} \cos(\omega_e t + \varepsilon_j), j = 1, \dots, 6 \quad (1)$$

gdje su:

- $\delta_j$  kompleksne amplitude njihanja,
- $e^{-i\omega_e t}$  vremenska harmonijska funkcija,
- $\omega_e$  kružna frekvencija harmonijskog njihanja jednaka susretnoj kružnoj frekvenciji,
- progresivnog harmonijskog vala,
- $\eta_{aj}$  i  $\varepsilon_j$  su realna vrijednost amplitude njihanja i fazni pomak u odnosu na nailazeći val.

Rezultirajuća oscilacijska gibanja broda ili njihanja sastoje se od triju translacijskih gibanja u smjeru osi  $x$ ,  $y$  i  $z$  te triju rotacijskih gibanja oko osi  $x$ ,  $y$  i  $z$ :

1. Translacijska gibanja:

- zalijetanje (u smjeru osi  $x$ )

$$\eta_1 = \eta_{a1} \cos(\omega_e t + \varepsilon_1) \quad (2)$$

- zanošenje (u smjeru osi  $y$ )

$$\eta_2 = \eta_{a2} \cos(\omega_e t + \varepsilon_2) \quad (3)$$

- poniranje (u smjeru osi  $z$ )

$$\eta_3 = \eta_{a3} \cos(\omega_e t + \varepsilon_3) \quad (4)$$

2. Rotacijska gibanja:

- valjanje (oko osi  $x$ )

$$\eta_4 = \eta_{a4} \cos(\omega_e t + \varepsilon_4), \quad (5)$$

- posrtanje (oko osi  $y$ )

$$\eta_5 = \eta_{a5} \cos(\omega_e t + \varepsilon_5), \quad (6)$$

- zaošijanje (oko osi  $z$ )

$$\eta_6 = \eta_{a6} \cos(\omega_e t + \varepsilon_6). \quad (7)$$

a svaki je oblik gibanja  $j$  ( $j = 1, \dots, 6$ ) u odnosu na val pomaknut za različiti fazni kut  $\varepsilon_j$ . Fazni pomak odnosi se na valnu elevaciju u ishodištu translatorajućeg koordinatnog sustava  $O(x, y, z)$ ,

$$\zeta = \zeta_a \cos(\omega_e t). \quad (8)$$

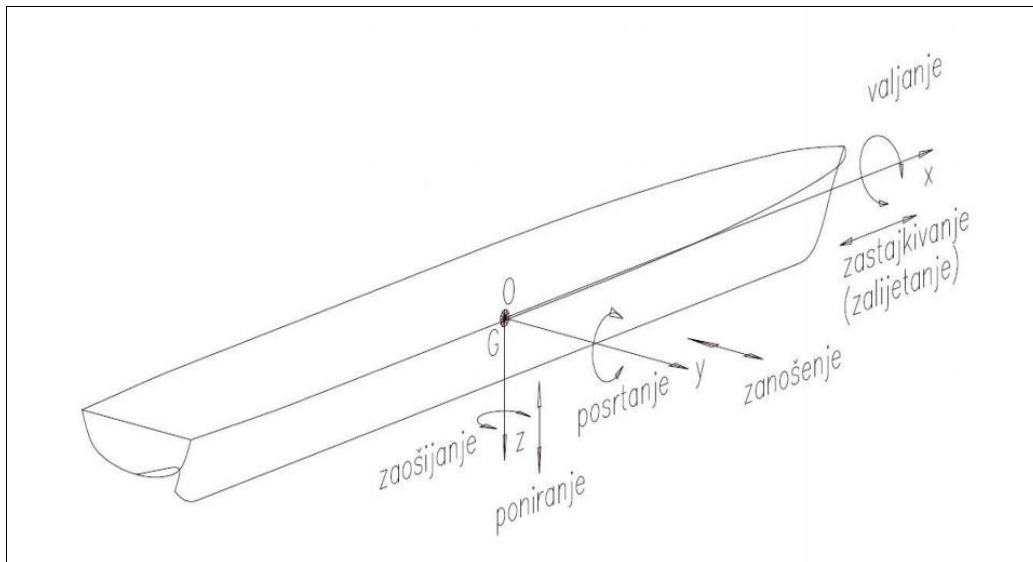
Polazeći od položaja broda u stanju mirovanja, pozitivan pomak:

- $\eta_1$  odgovara pomaku u smjeru napredovanja,
- $\eta_2$  odgovara bočnom pomaku ulijevo,
- $\eta_3$  odgovara izronu.

Rotacijski pomaci slijede pravilo desne ruke odnosno pozitivan pomak:

- $\eta_4$  odgovara uranjanju desnog boka broda,
- $\eta_5$  odgovara uranjanju pramca,
- $\eta_6$  odgovara zakretanju pramca ulijevo.

Samo tri od njih – poniranje, ljuljanje i posrtanje, su čista oscilatorna gibanja kod kojih djeluje povratna sila ili moment koji nastoje vratiti brod u ravnotežni položaj nakon što ga nešto poremeti iz njega. U slučaju zalijetanja, zanošenja i zaošijanja brod se ne vraća u izvorni ravnotežni položaj ukoliko se iz njega pomakne (osim u slučaju djelovanja vanjskih sila). [5]



**Slika 7. Šest stupnjeva slobode gibanja broda**

Trodimenzionalna metoda rubnih elemenata temelji se na principu Greenova integralnog teorema kako bi predvidjela hidrodinamičke koeficijente, sile i gibanja broda na valovima za svih 6 stupnjeva slobode gibanja. Također se koristi za predviđanje poniranja, posrtanja i ljuljanja broda pri konstantnim brzinama napredovanja proizvodnih smjerova nailaska broda na valove. Posebna pažnja stavlja se na predviđanje ljuljanja uzimajući u obzir važnost prigušenja u jednadžbi gibanja.

Prema Greenovu teoremu moguće je transformirati trodimenzionalnu linearnu homogenu diferencijalnu jednadžbu u dvodimenzionalnu integralnu jednadžbu te se na taj način trodimenzionalna Laplaceova (potencijalna) jednadžba transformira u površinsku integralnu jednadžbu. Površina tijela je podijeljena na  $n$  panela dovoljno malenih da se može pretpostaviti da su izvori (ponori), snaga potencijalnog strujanja uzrokovana izvorom konstantni po cijeloj površini svakog elementa. Prednost ove metode je ta da je problem reduciran na dvodimenzionalni (površinski) problem. Panel metoda je tehnika koja se koristi najčešće za analizu linearnog odziva stabilnog stanja velikih volumenskih struktura na valovitom moru. [7]

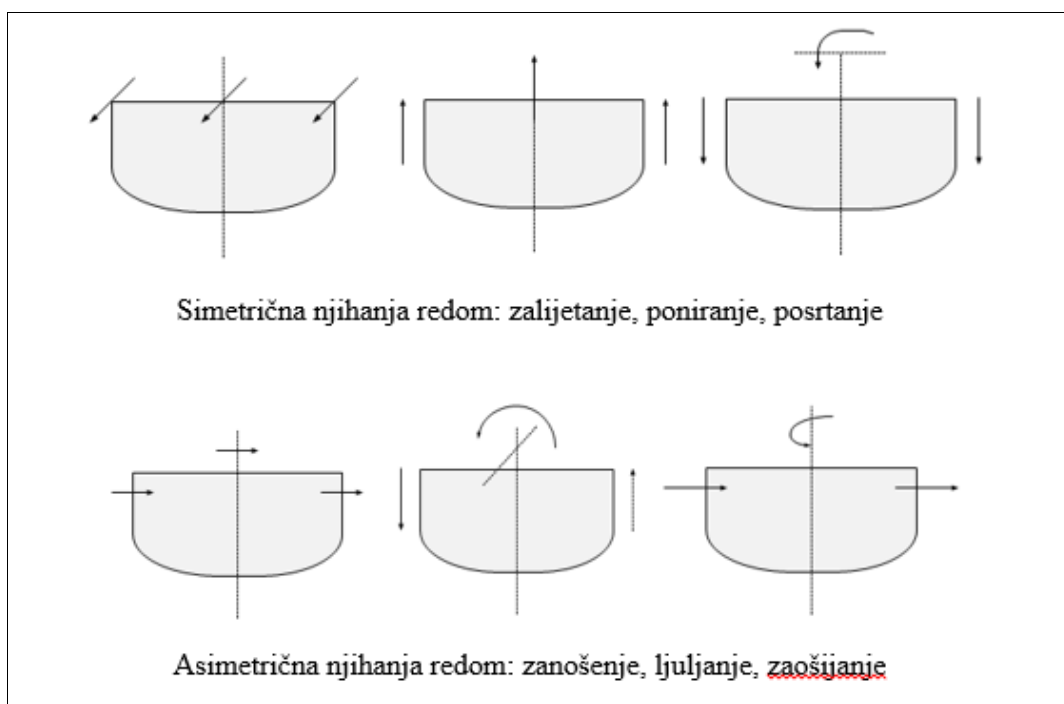
## 5. DINAMIČKA RAVNOTEŽA NJIHANJA

Brodovi su uglavnom konstruirani na način da imaju vertikalno uzdunu ravninu simetrije, te se sukladno tome njihanja mogu podijeliti na:

- simetrična i
- asimetrična.

### 5.1. SIMETRIJA NJIHANJA

Vektor brzine gibanja neke točke na jednom boku broda, kod simetričnih njihanja, je zrcalno simetričan vektoru gibanja zrcalno simetrične točke na drugom boku, u odnosu na vertikalno uzdužnu ravninu simetrije broda. U simetrična njihanja ubrajaju se: zalijetanje, poniranje i posrtanje. U asimetrična njihanja ubrajaju se: zanošenje, ljuljanje, i zaošijanje.



Slika 8. Simetrija njihanja

U linearnoj teoriji njihanja broda ne postoji sprega između simetričnih i asimetričnih njihanja. Primjerice, vertikalna sila koja djeluje u težištu broda može uzrokovati zalijetanje, poniranje i posrtanje, ali neće imati za posljedicu zanošenje, ljuljanje i zaošijanje. [2]

## 5.2. JEDNADŽBE DINAMIČKE RAVNOTEŽE

Jednadžbe njihanja broda u šest stupnjeva slobode proizlaze iz drugog Newtonovog zakona (po kojem je sila koja djeluje na tijelo jednaka umnošku mase i ubrzanja) koji se mora napisati u inercijskom koordinatnom sustavu koji se giba srednjom brzinom  $U$ . Budući da se sile i momenti koji djeluju na tijelo definiraju u koordinatnom sustavu vezanom za brod (koji oscilira zajedno s njim), potrebno je jednadžbe gibanja napisati u tom sustavu. Rezultat su visoko nelinearne Eulerove jednadžbe gibanja krutog tijela. Lineariziranjem istih dobiva se opći oblik jednadžbi njihanja broda:

$$\sum_{k=1}^6 m_{jk} \ddot{\eta}_k(t) = F_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, 6 \quad (9)$$

gdje su:

- $m_{jk}$  komponente poopćene matrice masa (koja uključuje mase i momente tromosti),
- $\ddot{\eta}_k$  ubrzanja gibanja u  $k$  - tom stupnju slobode,
- $F_j$  ukupne sile i momenti koji djeluju na tijelo u smjeru  $j$ . [4]

U slučaju simetričnosti broda s obzirom na središnju vertikalnu ravninu dobiva se šest jednadžbi dinamičke ravnoteže:

- Zalijetanje (engl. *surge*)

$$m(\ddot{\eta}_1 + \bar{z}_c \ddot{\eta}_5) = F_{\eta 1}, \quad (10)$$

- Zanošenje (engl. *sway*)

$$m(\ddot{\eta}_2 - \bar{z}_c \ddot{\eta}_4 + \bar{x}_c \ddot{\eta}_6) = F_{\eta 2}, \quad (11)$$

- Poniranje (engl. *heave*)

$$m(\ddot{\eta}_3 + \bar{x}_c \ddot{\eta}_5) = F_{\eta 3}, \quad (12)$$

- Ljuljanje (engl. *roll*)

$$I_{44} \ddot{\eta}_4 - I_{46} \ddot{\eta}_6 - m \bar{z}_c \ddot{\eta}_2 = F_{\eta 4}, \quad (13)$$

- Posrtanje (engl. *pitch*)

$$I_{55}\ddot{\eta}_5 + m\bar{z}_c\ddot{\eta}_1 - m\bar{z}_c\ddot{\eta}_3 = F_{\eta 5}, \quad (14)$$

- Zaošijanje (engl. *jaw*)

$$I_{66}\ddot{\eta}_6 - I_{64}\ddot{\eta}_4 + m\bar{x}_c\ddot{\eta}_2 = F_{\eta 6}. \quad (15)$$

gdje je:

- $m$  ukupna masa broda,
- $I_{jj}, I_{jk}$ , momenti tromosti,
- $\bar{x}_c$  i  $\bar{z}_c$  koordinate težišta broda u koordinatnom sustavu vezanom za brod.

Budući da su lineariziranjem nestale razlike između koordinatnih sustava gornje jednadžbe vrijede i u inercijskom koordinatnom sustavu. [5]

Drugi Newtonov zakon u jednom svom obliku određuje da su pri translaciji sile koje djeluju na tijelo jednake umnošku mase i ubrzanja. Za rotaciju momenti koji djeluju na tijelo jednaki su umnošku momenata tromosti i kutnog ubrzanja. Tijelo koje se njiše na valu u svakom je trenutku u stanju dinamičke ravnoteže. Hidrodinamičke i promjenjive hidrostatičke sile i momenti uravnoteženi su inercijskim silama i momentima mase tijela.

Primjerice kod poniranja i posrtanja  $F_{\eta 3}$  i  $F_{\eta 5}$  su vektori ukupne sile odnosno momenata koji djeluju na tijelo kao funkcija vremena. U linearnoj se teoriji te sile mogu prikazati kao suma uzbudnih sila koje uzrokuju oscilacijsko gibanje ( $F_3(t)$  i  $F_5(t)$ ) i hidrodinamičkih sila ( $F_{H3}(t)$  i  $F_{H5}(t)$ ), što je prikazano u jednadžbama:

$$F_3(t) + F_{H3}(t) = F_{\eta 3}(t), \quad (16)$$

$$F_5(t) + F_{H5}(t) = F_{\eta 5}(t), \quad (17)$$

gdje se uzbudne sile mogu izraziti kao:

$$F_3 \cos(\omega_e t + \varepsilon_{w3}) = F_3(t), \quad (18)$$

$$F_5 \cos(\omega_e t + \varepsilon_{w5}) = F_5(t). \quad (19)$$



$F_3$  i  $F_5$  su amplitude uzbudne sile poniranja i uzbudnog momenta posrtanja, a  $\varepsilon_{w3}$  i  $\varepsilon_{w5}$  fazni pomaci uzbuđe u odnosu na val. Uzbudne se sile dobiju rješenjem problema djelovanja valova na nepomično tijelo. Hidromehanička se sila sastoji od hidrostatičke i hidromehaničke sile:

$$F_{H3}(t) = A_{33}\ddot{\eta}_3 + B_{33}\dot{\eta}_3 + C_{33}\eta_3 + A_{35}\ddot{\eta}_5 + B_{35}\dot{\eta}_5 + C_{35}\eta_5, \quad (20)$$

$$F_{H5}(t) = A_{53}\ddot{\eta}_3 + B_{53}\dot{\eta}_3 + C_{53}\eta_3 + A_{55}\ddot{\eta}_5 + B_{55}\dot{\eta}_5 + C_{55}\eta_5, \quad (21)$$

gdje su:

- $A_{jk}$  i  $B_{jk}$  koeficijenti dodatne mase i prigušenja koji su ovisni o susretnoj frekvenciji,
- $C_{jk}$  je koeficijent povratne sile i neovisan je o frekvenciji.

Hidromehaničke se sile dobiju rješenjem problema njihanja tijela na mirnoj slobodnoj površini. Koristeći matricnu notaciju, inercijske sile i momenti oko koordinatnih osi mogu se izraziti kao:

$$\{F_i\} = [M_{jk}]\{\ddot{\eta}_j\} = \text{Re}\{-\omega^2[M_{jk}]\{\delta_j\}e^{-i\omega t}\}, \quad (22)$$

gdje je

- $[M_{jk}]$  matrica mase tijela i momenata tromosti tijela oko koordinatnih osi.

$$[M_{jk}] = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 & M_{z_g} & 0 \\ 0 & M & 0 & -M_{z_g} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -M_{z_g} & 0 & I_{44} & 0 & -I_{46} \\ M_{z_g} & 0 & 0 & 0 & I_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{46} & 0 & I_{66} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Simbol  $M$  označuje masu tijela, dok su  $I_{jj}$  momenti tromosti mase oko  $j$ -tih osi, a  $I_{jk}$  centriugalni momenti mase u odnosu na koordinatni sustav broda. Uz pretpostavku uzdužne simetrije, jedini centrifugalni moment mase koji se javlja u matrici je  $I_{46}$ .

$$I_{44} = \int_L (y_b^2 + z_b^2) dm \quad (24)$$

$$I_{55} = \int_L (x_b^2 + z_b^2) dm \quad (25)$$

$$I_{66} = \int_L (x_b^2 + y_b^2) dm \quad (26)$$

$$I_{46} = \int_L x_b z_b dm \quad (27)$$

Za spregu ljujanja i zaošijanja, ako brod ima simetriju u odnosu na os  $y_b$ , on je jednak nuli. U suprotnom je mala veličina. Za većinu je teretnih brodova, kada ne prevoze teret, masa koncentrirana na krajevima broda (strojarnica na krmi i balastna voda na pramcu), dok je u slučaju potpuno opterećenog broda masa koncentrirana u blizini sredine broda. Stoga je uobičajeno da momenti tromosti  $I_{55}$  i  $I_{66}$  budu manji kod potpuno opterećenog broda. Momenti tromosti mase često se izražavaju pomoću radijusa tromosti i mase tijela kao:

$$I_{44} = k_{44}^2 M \quad (28)$$

$$I_{55} = k_{55}^2 M \quad (29)$$

$$I_{66} = k_{66}^2 M \quad (30)$$

Ako raspored masa nije poznat, radijusi tromosti mogu se aproksimirati kao:

$$k_{44} \approx 0,3 B \text{ do } 0,4 B, \quad (31)$$

$$k_{55} \approx 0,22 L \text{ do } 0,28 L, \quad (32)$$

$$k_{66} \approx 0,22 L \text{ do } 0,28 L. \quad (33)$$

Gdje su:

- $L$  duljina broda,
- $B$  širina broda.

Ostali izvandijagonalni elementi matrice jednaki su nuli ako se ishodište koordinatnog sustava poklapa s težištem tijela. Međutim, najčešće je najpogodnije postaviti ishodište na vodnoj liniji, a u tom slučaju vertikalna udaljenost težišta  $z_G$  od ishodišta koordinatnog sustava  $O(x, y, z)$  nije jednaka nuli. Dinamička ravnoteža njihanja izražena je sljedećim sustavom diferencijalnih jednadžbi koji izražava ravnotežu inercijskih, hidromehaničkih i uzbudnih sila:

$$([M_{jk}] + [A_{jk}])\{\ddot{\eta}_j\} + [B_{jk}]\{\dot{\eta}_j\} + [C_{jk}]\{\eta_j\} = \zeta_a\{F_j(t)\} = \text{Re}\{\zeta_a\{F_j\}e^{i\omega t}\}, \quad (34)$$

odnosno uz pretpostavku harmonijskog gibanja, sljedećim sustavom algebarskih jednadžbi:

$$([C_{jk}] - \omega^2([M_{jk}] + [A_{jk}]) + i\omega[B_{jk}])\{\delta_j\}e^{i\omega t} = \zeta_a\{F_j\}e^{i\omega t}, \quad (35)$$

Kako gornja jednakost mora biti zadovoljena u svakom trenutku, uvjet dinamičke ravnoteže svodi se na kraju na sljedeći sustav kompleksnih algebarskih jednadžbi s nepoznicama  $\delta_j$ ,

$j = 1, \dots, 6.$

$$([C_{jk}] - \omega^2([M_{jk}] + [A_{jk}] + i\omega[B_{jk}]))\{\delta_j\} = \zeta_a\{F_j\}, \quad (36)$$

gdje je:

$[M_{jk}]$  - matrica mase tijela,

$[A_{jk}]$  - matrica pridruženih masa,

$[B_{jk}]$  - matrica hidrodinamičkog prigušenja i

$[C_{jk}]$  - matrica krutosti povratnih hidrostatskih sila. [2]

## 6. ZAKLJUČAK

Brodovi se konstruiraju na način da se što bolje snalaze u valnom okruženju i nemirnom moru koje zna često biti neugodno. Ponašanje broda na valovima bitno je procijeniti već u ranoj fazi projekta izgradnje broda. Proračuni njihanja jako su bitni pri gradnji brodova jer njihanje utječe na putnike, posadu, teret te konstrukcijske elemente broda.

Uloga stabiliteta broda igra ključnu ulogu pri njihanju broda. Karakteristike brodske dinamičke stabilnost određuju kako će se brod ponašati na valovima tj. dali će brod imati mogućnost nakon djelovanja vala vratiti se u uspravno stanje. Brodski stabilitet će ovisiti o dizajnu broda, ali i načinu krcanja tereta koji obavlja posada broda.

Metacentarska visina određuje silu koja će se odupirati valovima. Takva sila ne smije biti manja nego što se to zahtjeva. Međutim, ta visina ne smije biti ni prevelika zbog mogućnosti velike inercije i zbog toga što bi uvjeti života na brodu bili otežani zbog brzih perioda valjanja. Na temelju perioda valjanja zapovjednik ili časnik palube može odrediti dali su se promijenili elementi stabilnosti broda tijekom plovidbe.

U ovom radu zadatak je bio matematički objasniti ravnotežu njihanja broda jednadžbama dinamičke ravnoteže. Dinamika njihanja broda opisana je jednadžbama njihanja koje uravnotežuju vanjske sile i momente koji djeluju na brod s unutrašnjim silama i momentima uslijed inercije.

Unatoč tome što su temelji matematike postavljeni još u davnim vremenima, praktična primjena u pomorstvu nije u potpunosti zaživjela sa strane ekonomskog gledišta sve do razdoblja velikih otkrića. To je dovelo do velike količine novca u pomorstvu, a samim tim i većim brojem zaposlenika. Mogućnosti i želje za daljnji razvoj i usavršavanje pomorstva su nebrojene. U današnje vrijeme, ovisno o namjeni, teži se gradnji većih, bržih i sigurnijih brodova. Zbog ekonomičnosti prijevoza raznih tereta i putnika, pomorstvo je djelatnost koja će još dugo prevoziti veliku većinu svjetskog tereta.

## LITERATURA

- [1] Burazer, F.: *Proračun poniranja i posrtanja na harmonijskim valovima metodom rubnih elemenata*, Završni rad, Zagreb 2014.
- [2] Čorić, V.; Prpić-Oršić, J.: *Pomorstvenost plovnih objekata*, Sveučilište u Rijeci, Rijeka, 2006.
- [3] Gourlay, T.; Lilienthal, T.: *Dynamic Stability of Ships in Waves*, Proc. Pacific 2002 International Maritime Conference, Sydney, 2002.
- [4] Journée, J.M.J.; Pinkster J.: *Introduction in ship hydromechanics*, Delft University of Technology, Delft, 2002.
- [5] Martić, I.: *Procjena pomorstvenih karakteristika neoštećenog i oštećenog brod*, Diplomski rad, Zagreb 2014.
- [6] Radan, D.: *Uvod u hidrodinamiku brod*, Sveučilište u Dubrovniku, Dubrovnik, 2004.
- [7] Tomašević, S.: *Dinamička izdržljivost brodskih konstrukcija*, Magistarski rad, Zagreb, 2003.
- [8] Uršić, J.: *Plovnost broda*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 1991.
- [9] Uršić, J.: *Stabilitet broda*, I. i II. dio, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 1964.

## WEB IZVORI

- [10] Ohkusu, M.: Validation of Theoretical Methods for Ship Motions by Means of Experiment URL: <http://www.hrcak.srce.hr/file/102052>, (04/09/2016).
- [11] [http://lshipdesign.blogspot.hr/2016\\_03\\_01\\_archive.html](http://lshipdesign.blogspot.hr/2016_03_01_archive.html), (08/09/2016).
- [12] <https://www.amc.edu.au/model-test-basin>, (09/09/2016).
- [13] <http://www.iuhr.uiowa.edu/shiphydro/efd-data/5512-calm-h2o-maneuvering/>, (04/09/2016).
- [14] [http://file.scirp.org/Html/7-2320085\\_37049.htm](http://file.scirp.org/Html/7-2320085_37049.htm), (14/09/2016).
- [15] <http://www.mecaflux.com/en/ship%20Hydrodynamics.htm>, (05/09/2016).
- [16] <http://www.marineinsight.com/naval-architecture/understanding-intact-damage-stability-of-ships/>, (10/09/2016).

## POPIS SLIKA

Slika 1. Točke stabilnosti .....	9
Slika 2. Točke uporišta pri utjecaju dinamičkih sila .....	11
Slika 3. Kursni ili susretni kut.....	15
Slika 4. Snimak vala u trenutku $t$ .....	16
Slika 5. Snimak vala u točki $x$ .....	17
Slika 6. Koordinatni sustavi .....	22
Slika 7. Šest stupnjeva slobode gibanja broda .....	24
Slika 8. Simetrija njihanja .....	25