Matematika - korisno oruđe u rukama pomorca

Roso, Toni

SVEUČILIŠTE U SPLITU

POMORSKI FAKULTET U SPLITU

TONI ROSO

MATEMATIKA - KORISNO ORUĐE U RUKAMA POMORCA

ZAVRŠNI RAD

SPLIT, 2018.

SVEUČILIŠTE U SPLITU

POMORSKI FAKULTET U SPLITU

STUDIJ: POMORSKA NAUTIKA

MATEMATIKA - KORISNO ORUĐE U RUKAMA POMORCA

ZAVRŠNI RAD

MENTOR:

Doc.dr.sc. Tatjana Stanivuk

STUDENT:

Toni Roso (MB:0171261429)

SPLIT, 2018.

SAŽETAK

Predmet ovog rada je primjena matematike u pomorstvu, odnosno matematika kao korisno oruđe u rukama pomorca. Matematika se još od davnina koristi u brojnim tehničkim granama, pa tako i u pomorstvu. Stoga se može reći da se matematika i pomorstvo prate kroz povijest. Razvoj matematike utjecao je na razvoj samog pomorstva i svih grana vezanih za tu djelatnost. Još od prvih civilizacija čovjek je znao da mu more može poslužiti kao izvor hrane i način da se poveže i trguje između dva mjesta na Zemlji. Korisnost matematike u pomorstvu se može promatrati kroz primjenu trigonometrije i geometrije u terestričkoj i astronomskoj navigaciji, te u proračunima vezanim za prijevoz tereta i stabilitet broda.

Ključne riječi: matematika, pomorstvo, navigacija, stabilitet broda

ABSTRACT

The subject of this work is the application of mathematics in maritime science, i.e. mathematics as a useful tool in the hands of seafarers. Mathematics has been used in many technical fields since ancient times, even in maritime science. Therefore, it can be said that mathematics and maritime affairs are accompanied through history. The development of mathematics has influenced the development of seafaring and all branches related to this activity. Even since the first attempts, the man knew that sea could serve as a source of food and a way to connect and trade between two places on Earth. The use of mathematics in seamanship can be observed through the application of trigonometry and geometry in terrestrial and astronomical navigation, and in calculations related to the cargo transport and stability of the ship.

Key words: mathematics, seamanship, navigation, ship stability

SADRŽAJ

1. UVOD

Što je to matematika? Čime se bavi? Zašto je važna za pomorstvo? Ovo su samo neka od pitanja koja se postavljaju kada netko spomene matematiku i pomorstvo zajedno. U ovom radu mogu se pronaći odgovori na ta pitanja. Naime, najstarije poznate matematičke pločice potječu iz 2400. godine prije Krista, no zasigurno se uporaba matematike proteže na cijelu civilizaciju.

Bitno je naglasiti kako matematika može biti od velike važnosti u mnogim segmentima pomorstva. Može se obraditi dosta toga vezano za ovu temu, ali ovaj rad zbog ograničenosti stranica, bazirat će se na upotrebi matematike u terestričkoj i astronomskoj navigaciji te poznavanje matematičkih formula za lakše rješavanje problema.

Kako bi se to sve moglo razumjeti važno je prvo objasniti definiciju terestričke i astronomske navigacije.

Terestrička navigacija je metoda vođenja broda korištenjem metoda grafičkog i numeričkog rješavanja zadataka, te promatranjem prirodnih i izgrađenih objekata na obali, moru i mjerenjem dubine mora [14].

Dok je astronomska navigacija klasična grana navigacije, koja matematičkim metodama (algebra, geometrija te sferna trigonometrija) pomoću sekstanta, kronometra, nautičkog godišnjaka te nautičkih tablica nalazi jednu ili više stajnica [10].

Osim spomenutog, rad će se dotaknuti i teme stabilitet broda. Stabilitet ili stabilnost broda je sposobnost da se brod odupire negativnim utjecajima kao što su gibanje mora i zraka koji pokušavaju brod pomaknuti iz stanja ravnoteže. Kako bi stabilnost broda bila što sigurnija bitne su dvije stavke, a to su razmještaj težine i forma trupa broda. O formi trupa odlučuje brodogradilište, a za razmještaj težine zaslužan je zapovjednik broda. Sve to dobro je poznavati i od velike je važnosti ne samo za pomorce već za cijelo pomorstvo općenito [12].

Nakon uvoda objašnjena je definicija matematike, te grane matematike koji su od važnosti za pomorstvo: trigonometrija i geometrija. Također spomenute su neke značajnije osobe koje su zaslužne za razvoj navedenih grana matematike.

U trećem poglavlju detaljnije je objašnjen pojam pomorstva. Opisan je njegov razvoj od samih početaka prije pojave kompasa, za vrijeme kompasa, te kronometarsko, elektronsko i satelitsko razdoblje u kojem počinje upotreba globalnog sustava za pozicioniranje (engl. *Global Positioning System* – GPS).

Četvrto poglavlje bavi se primjenom matematike u pomorstvu. U tom poglavlju detaljnije je opisana primjena matematike u terestričkoj i astronomskoj navigaciji. Odnosno opisane su krivulje koje se koriste u terestričkoj navigaciji (loksodroma i ortodroma) te metode koje se koriste u astronomskoj navigaciji koristeći za to visine Sunca i ostalih nebeskih tijela.

Peto poglavlje govori o stabilitetu broda. Tu su spomenuti i neki od osnovnih pojmova brodskog stabiliteta, zatim njegova podjela, uvjeti plovnosti te moment statičke stabilnosti broda.

Šesto, ujedno i zadnje poglavlje, donosi zaključak u kojem su sažeti svi podatci opisani u ovom završnom radu, te su izneseni osobni stavovi autora.

2. DIO MATEMATIKE OD VAŽNOSTI ZA POMORSTVO

2.1. MATEMATIKA - OPĆENITO

Matematiku nije lako definirati pa tako postoje razne definicije različitih autora. Može se reći da je matematika ljudska djelatnost koja postoji već tisućama godina i svatko je, svjesno ili nesvjesno, svakodnevno rabi. Osim toga postoje ljudi koji su profesionalni matematičari: oni proučavaju, rade, njeguju, podučavaju, stvaraju matematiku i koriste je u mnogim situacijama. Matematika u užem smislu podrazumijeva znanost o količini (aritmetika), strukturi (algebra), prostoru (geometrija) i promjeni (analiza). Ona se razvija iz potrebe kako bi se mogli dobiti proračuni u trgovinama, vršila razna mjerenja zemljišta i kako bi se predvidjeli astronomski događaji. Ove tri navedene primjene matematike mogu se usporediti sa podjelom na izučavanje strukture, prostora i promjena [7].

Osim toga matematika je jako važna za pomorstvo. Pomoću nje može se doći do značajnih izračuna koji su bitni u ovoj specifičnoj gospodarskoj grani. To mogu biti razni financijski proračuni, od početka samog planiranja izgradnje broda pa do prihoda koji će isti u budućnosti donositi svojoj kompaniji. Stabilitet broda, navigacija, meteorologija, itd., samo su neki segmenti koji bi bili nerješivi bez primjene matematike.

Matematika potiče ljude na razmišljanje i razvija njihovu logiku. Kako pomorstvo napreduje brodovi koji se gradu su sve veći, okretniji, brži i moderniji. Kako bi gradnja takvih brodova bila lakša te kako bi se olakšalo putovanje i korištenje istih važno je znati primijeniti matematiku. Zato se i kaže da je matematika važno oruđe u rukama pomoraca [15].

2.2. TRIGONOMETRIJA

Trigonometrija je definirana kao jedna od grana matematike koja proučava odnose između stranica i kutova u trokutima, budući da se svaki pravilan oblik može razbiti u trokute. Trigonometrija se ne ograničava samo na područje geometrije, već i na područja kompleksnih brojeva, beskonačnih nizova, logaritama. Riječ trigonometrija je latinski derivat iz 16. stoljeća od grč. *trigònon* što znači trokut i grč. *metron* što znači mjeriti. Iako se polje trigonometrije pojavilo u Grčkoj tijekom trećeg stoljeća prije Krista, neki od najvažnijih doprinosa, kao što je sinusna funkcija, dolazili su iz Indije u petom stoljeću. Budući da su rani trigonometrijski radovi antičke Grčke izgubljeni, nije poznato da li su indijski znanstvenici razvili trigonometriju samostalno ili zbog grčkog utjecaja. Za razvoj trigonometrije u Europi najzaslužniji je njemački matematičar, astronom i astrolog Regiomontanus (Johannes Muller) [19].

2.2.1. Regiomontanus

Johannes Müller von Königsberg, poznatiji pod nazivom Regiomontanus, bio je jedan od najvažnijih astronoma i matematičara u petnaestom stoljeću. Školovao se na Sveučilištima u Leipzigu i Beču. Sa svojim mentorom, matematičarom-astronomom Georgom von Peuerbachom surađivao je na raznim astronomskim i astrološkim projektima, uključujući promatranje pomrčine, prolaske kometa, proizvodnju astronomskih instrumenata i drugo. Nakon smrti svog mentora odlazi u Rim gdje dovršava "Epitom" u kojem demonstrira alternativu Ptolomejovim modelima Merkura i Venere u odnosu na Sunce, što poslije daje Koperniku ideju o kretanju planeta oko Sunca. "Epitom" se smatra jednim od najboljih kritičkih djela Ptolomejovoj astronomiji. Ono čime je Regiomontanus doprinio razvoju astronomije, a time i pomorstva zasigurno je njegov izum astrolaba. Astrolab je uređaj koji radi na principu stereografske projekcije. Time se može omogućiti da se trodimenzionalna nebeska sfera koja predstavlja nebo precrta na disk zakrivljenih linija. Pokreti Sunca i zvijezda mogu se pratiti na astrolabu, nakon što se utvrdi njihova pozicija. Većina astrolaba je opremljena s nišanom koji je potreban da bi se obavila mjerenja. Osim mjerenja nebeskih tijela, bilo je moguće izmjeriti i visine građevina, stabala, svjetionika. Astrolab je preteča današnjem sekstantu [4], [30], [18].

2.3. GEOMETRIJA

Geometrija je grana matematike koja u svojoj izvornoj problematici proučava položaj, oblik i svojstva geometrijskih tijela u prostoru te njihov međusobni odnos. Tijekom daljnjeg razvoja njezin predmet proučavanja postao je širi i apstraktniji. Osnovni geometrijski pojmovi su: točka, pravac, ravnina i prostor, a ostali geometrijski likovi su: geometrijska tijela, dužina, kružnica, geometrijski odnosi [6], [16], [21].

Geometrijske ideje ponikle su u veoma davna vremena. Njihovo početno oformljenje obično se dovodi u vezu sa prastarim kulturama Egipta i Babilona u 20. st. prije nove ere. U egipatskim papirusima nalazi se mnoštvo matematičkih činjenica, no ni u jednom od njih nisu spomenuta nikakva obrazloženja. Iz sačuvane dokumentacije geometrija je bila čisto praktičnog oblika i to na zavidnom nivou. Poznavali su formule za površinu trokuta, pravokutnika i trapeza. Površinu kruga su izračunavali sa dosta velikom točnošću, a znali su i formulu za izračun volumena krnje piramide.

Dok su Egipćani i druge antičke kulture razvijali mnoga geometrijska pravila, nisu se nikad dotakli razvijanja znanja o geometriji. Tek stoljećima kasnije, Grčki filozofi i matematičari poput Talesa, Pitagore, Euklida i Arhimeda, su počeli od geometrije razvijati znanost [33].

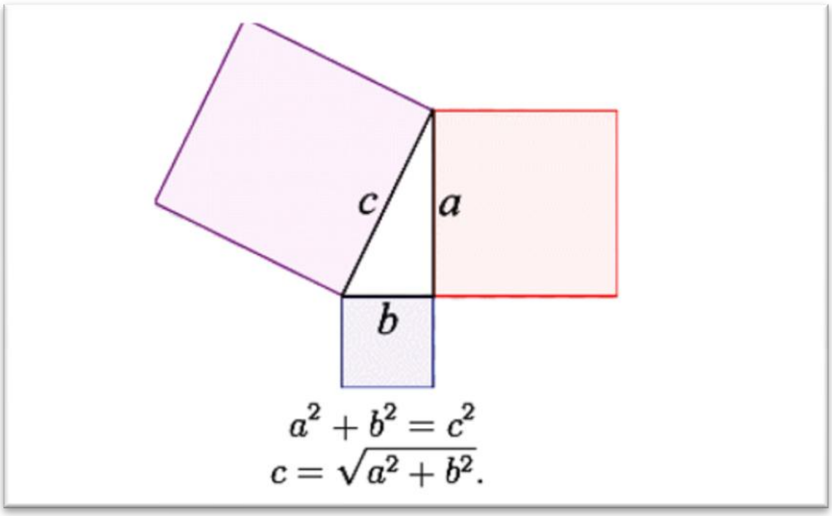
2.3.1. Tales

Tales, grčki matematičar i filozof, živio je u predsokratskim vremenima oko 620.-625. godine prije Krista. Uobičajeno je poznat kao Tales iz Mileta. Bio je i jedan od sedam grčkih mudraca koji su ostavili neizbrisiv utjecaj na filozofiju i druge znanosti. Tales je obilježio to razdoblje kao jedna od najvažnijih osoba toga doba te je zbog toga nazvan "otac znanosti". U matematici Tales dolazi do rješavanja problema izračuna visina ili udaljenosti uz pomoć geometrije. Među prvima je koristio metodu dedukcije. Zbog otkrivanja novih metoda u matematici, Talesa se može smatrati prvim pravim matematičarom. Njegovo najveće dostignuće bilo je otkriće teorema koji nose ime njemu u čast, a glasi:

1. Krug je svakim svojim promjerom podijeljen na dva dijela jednakih površina.
2. Kutovi uz osnovicu jednakokračnog trokuta su jednaki.
3. Kutovi između dva pravca koji se sijeku su jednaki.
4. Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i dva kuta uz tu stranicu.
5. Kut nad promjerom kružnice je pravi [24].

2.3.2. Pitagora

Pitagora sa Samosa jedno je od najpoznatijih imena u matematici. On je dodatno razvio Talesove ideje. Pitagora je među ostalim utemeljio filozofsku i matematičku školu na Crotonu, a pripadnici te škole su se nazivali Pitagorejci u čast svog osnivača. Pitagora je osobno poučavao članove škole, te danas zbog tajnog života članova i strogih pravila nema mnogo informacija o njihovom doprinosu matematici. Pitagora i njegovi sljedbenici prvi su uspjeli dokazati da će zbroj tri unutarnja kuta trokuta uvijek iznositi 180°. Također je dokazao poznati teorem koji dan danas nosi njegovo ime, Pitagorin poučak , što je prikazano crtežom na slici 1., a koji glasi: "Površina kvadrata nad hipotenuzom pravokutnog trokuta jednaka je zbroju površina kvadrata nad katetama.", a dokazuje povezanost stranica pravokutnog trokuta i hipotenuze [23].



Slika 1. Prikaz Pitagorinog poučka [29]

2.3.3. Euklid

Euklid se često naziva "ocem geometrije", a napisao je najvažniji i najznačajniji matematički udžbenik svih vremena, "Elementi", koji predstavlja vrhunac matematičke revolucije koja se dogodila do tada. U ovom revolucionarnom djelu koje je podijeljeno u 13 knjiga postavio je mnoge aksiome geometrije koji se koriste i dan danas. U knjigama 1.-6. obrađena je planimetrija, 7.-10. aritmetika i teorija brojeva u geometrijskom obliku, a 11.-13. stereometrija. Također je napisao djela o podjeli geometrijskih figura u dijelove u određenim omjerima, o sferičnoj astronomiji kao i mnogobrojne važne tekstove o optici. Euklid je iznio i dokazao brojne tvrdnje koje se nazivaju aksiomima ili postulatima.

Euklidovih pet općih aksioma su:

1. Stvari koje su jednake istoj stvari i međusobno su jednake.
2. Ako se jednakim stvarima dodaju jednake stvari, i cjeline su jednake.
3. Ako se od jednakih stvari oduzmu jednake stvari, i ostaci su jednaki.
4. Stvari koje se jedna s drugom poklapaju međusobno su jednake
5. Cjelina je veća od dijela.

Euklidovih pet postulata o geometriji glase:

1. Dvije točke određuju segment pravca (dužinu).

2. Dužinu je moguće produžiti u beskonačnost (na oba njena kraja, čime se dobiva pravac).
3. Zadani segment pravca definira kružnicu (jedan kraj segmenta je središte, a duljina segmenta je polumjer).
4. Svi pravi kutovi su jednaki (kongruentni).
5. Ako pravac siječe dva pravca tako da je zbroj kutova s iste strane manji od dva prava kuta, onda se ta dva pravca (ako se dovoljno produže) sijeku [32].

2.3.4. Arhimed

Izumitelj, astronom i matematičar, Arhimed sa Sirakuze je poznat po svojim izumima katapulta, leće, poluge, pumpe i vijka. Arhimed se, zajedno sa Newtonom i Gaussom, smatra jednim od najvećih matematičara svih vremena. Arhimed je pronalazio formule za izračunavanje površina pravilnih likova koristeći metodu pronalaženja novih likova a koristeći likove koje je već znao. Koristeći "metodu iscrpljivanja" došao je do otkrića jednog od najbitnijih brojeva u matematici π (čitati: pi). Također je imao uspjeha i na području fizike gdje je otkrio zakon o plutanju krutih tijela koji nosi njegovo ime.

2.4. INTEGRALNE FUNKCIJE

Integriranje je postupak izračunavanja površine ispod krivulje neke zadane funkcije. Površina ispod krivulje podijeli se na određeni broj vertikalnih stupova, a suma tih stupova daje površinu ispod krivulje. Jedan od najvećih matematičkih umova svih vremena, Sir Isaac Newton otkrio je ovu metodu. Primjena integriranja u pomorstvu vidi se kod Simpsona i pravila za izračun poluge statičkog stabiliteta te u brojnim zadatcima proračuna stabilnosti broda.

2.4.1. Isaac Newton

Sir Isaac Newton bio je matematičar, fizičar, filozof i zasigurno najistaknutija figura u svjetskoj povijesti. U svom djelu "Matematička načela prirodne filozofije" (lat. Philosophiae Naturalis Principia Mathematica) objavljuje otkrića derivativnih i integralnih funkcija koja se koriste i u današnjim vremenima. Newtonov temeljni teorem tvrdi da su deriviranje i integriranje inverzne operacije, tako da, ako je funkcija prvi put integrirana, a zatim derivirana (ili obratno), dobiva se izvorna funkcija [28].

2.5. VEKTORI

U svijetu oko nas lako će se prepoznati mnoge veličine i vrijednost koje se izražavaju brojem. To su, na primjer, duljina, površina, obujam, temperatura, tlak, masa, energija, itd. Jednim imenom - skalarne veličine. Međutim, neke se veličine ne mogu opisati samo brojem. Za djelovanje sile važan je njezin iznos, ali i smjer djelovanja. Isto tako, brzina je fizikalna veličina koja, uz svoj iznos, mora imati definiran i smjer. Isto će vrijediti i za ubrzanje, moment sile, električno ili magnetsko polje, itd. Takve se veličine nazivaju vektorima. Vektor je usmjerena dužina koja ima svoje hvatište i kraj. Svaki vektor određen je sa tri stvari: duljinom, smjerom i orijentacijom. Duljina vektora je udaljenost između hvatišta i kraja vektora. Smjer vektora određen je pravcem na kojem leži. Za vektore koji leže na paralelnim pravcima kaže se da su kolinearni vektori. Orijentacija vektora govori prema kojoj strani je vektor orijentiran. Vektori su jako bitni u pomorstvu, primjerice kod uređaja automatskog plotiranja (engl. *Automatic Radar Plotting Aids* - ARPA) koji na temelju vektora računa najbližu točku mimoilaženja (engl. *Closest Point of Approach* - CPA) i vrijeme do najbliže točke mimoilaženja (engl. *Time to Closest Point of Approach* - TCPA), a za izračun koristi varijable brzine i usmjerenja, te kod terestričke navigacije gdje se svaki ucrtani kurs može zamijeniti vektorom [20], [5], [33].

3. POMORSTVO

Pomorstvo je umijeće upravljanja i manevriranja brodom, njegovom opremom i posadom. U pomorstvo se uključuje sposobnost navigacije, pilotiranje, sidrenje, izbjegavanje sudara na moru, rad sa teretom, itd.

Osnovne djelatnosti u kojima pomorstvo sudjeluje su brodogradnja, pomorska trgovina i brodarstvo, aktivnosti u lukama, nautički turizam, ratna mornarica, održavanje lučke, kanalske i sigurnosne infrastrukture. Osim osnovnih, postoje i mnoge druge djelatnosti koje bi bile nezamislive bez pomorstva, a neke od njih su ribarstvo, marikultura, proizvodnja soli, eksploatacija nafte i zemnog plina, eksploatacija nalazišta mangana, bakra i drugih ruda.

Preduvjet za postojanje pomorstva su svjetska mora koja povezuje sve kontinente. Osim zrakoplovnog prometa, pomorski je promet od velike važnosti međusobnog povezivanja kontinenata. Isto tako pomorskom prometu u svjetskom transportu prednost daje i to što je najjeftiniji oblik transporta. Naime, osim izgradnje privatnih terminala tj. luka te sigurnosnih uređaja nije potrebno ulagati u pomorske putove. Također ekonomskoj isplativosti pomorskog prometa pridonose sve veći prijevozni kapaciteti brodova [34].

U ovom radu pomorstvo će se razmatrati kroz neke od najvažnijih navigacijskih otkrića, a kompas, kronometar, moderni radar, elektroničke karte i GPS su samo neka od njih.

3.1. POMORSTVO PRIJE KOMPASA

Ljudi u samim početcima nisu izlazili na more sa brodovima, već su se služili sa onim što im je moglo pomoći da plutaju na površini. Jedan od prvih koraka u plovidbi bio je jednostavan oblik plutajuće splavi, napravljene od jedne klade ili od snopova trske koji bi mogli podnijeti čovjeka na platformi. Na takvim splavima plovilo se na područjima uz rijeke Nil, Eufrat i Tigris. Upravo tamo su se i razvile prve civilizacije što ukazuje na životnu važnost pomorstva [2].

Egipćani su plovili negdje oko 2750. godine prije nove ere, na brodovima izrađenima od papirusa. Pojava brodova dovoljno velikih da prevoze teret, u svrhu trgovine, počinje negdje oko 3500. godine prije nove ere i od tada pomorstvo počinje napredovati sve do danas. Prvi pomorci plovili su blizu obale pomoću oznaka na kopnu ili drugih obilježja koja su mogli vidjeti. Plovili su tijekom dana, a navečer su tražili sklonište u lukama. Nisu imali karte, već liste sa uputama, slično današnjim uputama za pomorce.

Dok su plovili daleko od obale, tadašnji pomorci bili su sposobni odrediti geografsku širinu na osnovu promatranja Sunca, tokom dana ili noći, pomoću zvijezde Polare [31].

Feničani su bili prva civilizacija sa Zapada za koju se zna da je razvila umijeće plovidbe na moru, otprilike prije 4000 godina. Feničanski pomorci su razvili dva tipa plovidbe. Prvi tip je bila obalna, a drugi tip plovidba na otvorenom moru. Feničani su znali držati kurs u plovidbi po noći promatrajući ono što su stari pisci nazivali "Feničanskom Zvijezdom". Ona je danas poznata pod nazivom Polara ili Sjeverna Zvijezda. Većinom su u noći i tokom loših vremenskih uvjeta tražili zaklon među zaštićenim područjima uz obalu [31], [17].

Iskustva sa putovanja i plovidbi starih Grka, te saznanja koja su dobili od kultura bliskim istoku, su bila temelji grčkog poznavanja Zemlje. Prva grčka zemljopisna istraživanja zapisana su u obliku izvještaja i opisa što su ih bilježili grčki pomorci. Oko 525. godine prije nove ere, pitagorejci su postavili novu teoriju u kojoj se tvrdilo da je Zemlja kugla. Tu je teoriju znanstveno dokazao u 4. st. pr.n.e. Aristotel. Na temelju teorije da je Zemlja okrugla, te proučavajući proračune iz astronomije i matematike u 2. st. pr.n.e. Eratosten je izmjerio Zemljin meridijalni opseg. On je iznosio 28 000 stupnjeva širine i 80 000 stupnjeva dužine mjereći dužinu od istoka prema zapadu [26], [3].

Velik doprinos pomorstvu u ranom srednjem vijeku su donijeli Arapi koji su naslijedili znanje pozicioniranja koristeći zvijezde i Sunce u konjunkciji sa fiksiranim točkama na Zemlji od Grka i drugih starih civilizacija. Arapi su koristili sofisticiranije instrumente za određivanje pozicije promatrajući Sunce, zvijezde i horizont poput kamala i astrolaba. Astrolab su izumili Grci, a usavršili Arapi u 8. st. [26], [3].

Prva pomorska škola i opservatorij su otvoreni sredinom 15.st. od strane Henrika, pomorca u Portugalu, u gradu Sarges. Dok su prve astronomske tablice (Toledske) nastale 1080. godine, te su poboljšane tijekom 13. st. (Alfonsove i Zadarske). Prve upotrebljive astronomske tablice sa efemeridama nebeskih tijela izradio je Regiomontanus za period 1470. do 1507. godine, čime je potaknuo neka od velikih geografska otkrića [8].

3.2. KOMPASNO RAZDOBLJE

Pomorstvo, nakon dolaska i primjene kompasa, na Sredozemlju, nije više onakvo kakvo je bilo u srednjem vijeku.

Prvi kompas su na Sredozemlje donijeli Arapi 1248. godine, s tim da je tek u 14. st. magnetska igla bila podijeljena na 12 vjetrova, čime se dobila ruža vjetrova. Britanski fizičar William Thompson je 1877. godine ispod ruže postavio više magneta, te tako povećao osjetljivost i stabilnost magnetskog kompasa. Kompas, kakav se danas koristi, izrađen je tek krajem 19. st.

Vikinzi su u 13. i 14. st. koristili rani oblik kompasa i gnomonske ploče da bi zaključili svoju približnu geografsku širinu, a oslanjajući se na Sunčevu sjenu da bi otkrili lokalno vrijeme. Također je poznato da su koristili Sunčev kamen tj. mineral koji je mogao otkriti Sunce i po potpuno oblačnom nebu.

U početcima su pomorci smatrali kompas netočnim i nedosljednim, jer im nije bio poznat pojam magnetske varijacije.

Magnetska varijacija je prva otkrivena od strane Kineza u 11. st., dok je u Europi do tog otkrića prvi došao Kolumbo u 15. st. Vrijednost varijacije je počeo određivati William Borough 1580. godine. Devijacija magnetskog kompasa je otkrivena 1627. godine. Sa tim problemom bavio se Matthew Flinderste. On je 1802. godine pronašao mogućnost kompenzacije dijela nepoželjne devijacije. Tijekom 19. st. su kompenzacijske metode dopunjene.

Prve su upotrebljive u portolanskoj navigaciji sredinom 13. st. Portolanske karte su se zasnivale na znanju pomoraca koji su tada plovili Mediteranom. Oni su tada počeli shvaćati korisnost zemljovida te su počeli voditi detaljne zapise o svojim putovanjima. Danas najkorisnija Merkatorova navigacijska karta objavljena je 1569. godine. Istu je konstruirao nizozemski geograf Geradus Mercator.

Izum ručnog brzinomjera se smješta u 16. st. Naime, poznato je da se spominje njegovo korištenje na Magelanovom putovanju 1521. godine, dok je prvi mehanički brzinomjer korišten sredinom 17. st.

Za ovaj period se vežu i velika geografska otkrića (Kolumbovo otkriće Amerike), brojne inovacije u pomorstvu i početak prekooceanske plovidbe. Stoga se može reći da je kompas jedan od najvažnijih otkrića u pomorstvu [8], [34], [17], [27], [22].

3.3. KRONOMETARSKO RAZDOBLJE

Britanski parlament je 1714. godine, sedam godina nakon strahovite pomorske nesreće u kojoj je 1550 ljudi izgubilo živote, osnovao odbor o zemljopisnoj dužini. Tim zakonom nudili su bogatu nagradu (20 000 funti) onome tko napravi točno sredstvo za otkrivanje zemljopisne dužine.

Godinama su najbolji britanski urari bili neuspješni u tom naumu, a najveći umovi tog doba su smatrali da je to nemoguće napraviti. Čak je veliki Sir Isaac Newton zaključio da nijedan sat ne može riješiti problem zemljopisne dužine.

Sve dok 1735. godine samouki urar John Harrison nije predstavio svoj prvi model H1, kraljevskom odboru za geografsku dužinu. Odbor je istog trena prihvatio sat, te ga poslao na put do Lisabona kako bi ga se testiralo. Testiranje je pokazalo da je pogreška u zemljopisnoj dužini iznosila otprilike 60 milja, što je oduševilo posadu broda, ali i odbor. Međutim odbor je odbio dati punu nagradu Harrisonu te su mu dali iznos od 500 funti za nastavak rada. Godine 1755. Harrison počinje sa radom na zadnjem modelu. Sa radom je završio 1761. godine, te je H4 postavljen na brod kraljevske mornarice (engl. *His Majesty's Ship* - HMS) Deptford za putovanje na Jamajku. Harrisonov sin William je bio zadužen za sat, te je svojim proračunima na karti uz pomoć H4 sata, točno procijenio obalu Kingstona sa greškom od samo jedne nautičke milje.

Unatoč tome što je to bio uspjeh, odbor je svejedno odbio nagradu od 20 000 funti Harrisonu te mu dao 5 000 funti, sa izlikom da njegov kronometar nije praktično rješenje za čitavu Britansku flotu [9].

Osim već spomenutih, za ovo razdoblje se još veže otkriće Sumnerove i Visinske metode, početak plovidbe po ortodromi (razvojem parobroda), razvoj hidrodinamičkog brzinomjera, te ultrazvučnog dubinomjera. Godine 1884. na konferenciji u Washingtonu, svijet je prihvatio grinički meridijan kao nulti meridijan, te se Zemlja podijelila u 24 vremenske zone [8].

3.4. ELEKTRONSKO I SATELITSKO RAZDOBLJE

Pretpostavlja se da je prvo korištenje elektronike u navigaciji bilo odašiljanje točnog vremena putem radio signala 1903. godine, te se tim omogućilo pomorcima da isprave kronometar u plovidbi. Nakon 1921. godine je postavljen prvi radiofar.

Najveća otkrića u elektronskoj navigaciji su se događala između dva svjetska rata, pojačano tijekom drugog svjetskog rata i nakon njega. Prvi radar je konstruirao Dr. Robert M. Page 1935. godine. Tek 1945. godine nakon završetka drugog svjetskog rata radar ulazi u komercijalnu uporabu.

Između 1940. i 1943. godine Američka vlada razvija hiperbolni navigacijski sustav (engl. *Long Range Navigation* – LORAN A). Kasnije dolazi i do razvoja preciznijih sustava srednjeg dometa LORAN C i DECCA navigacijski sustav (engl. *Decca Navigation Sytem* - DECCA). 1973. godine američko ministarstvo obrane razvija, a 1981. godine pušta u rad globalni pozicijski sustav (engl. *Global Positioning System* - GPS) sustav. Taj sustav se sastoji od 24 satelita i pruža relativno precizno pozicioniranje. GPS radi gotovo identično kao i LORAN, s tim da signal dolazi sa satelita [31], [22].

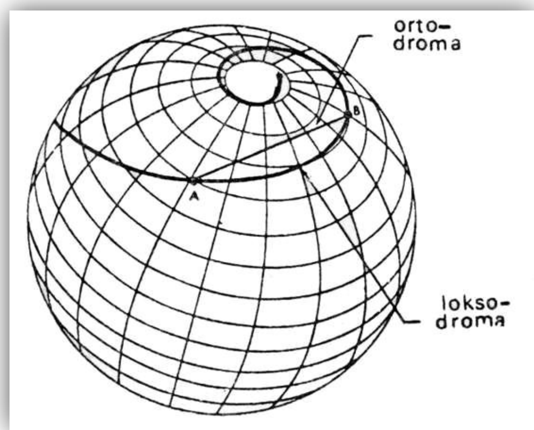
4. PRIMJENA MATEMATIKE U NAVIGACIJI

4.1. PRIMJENA MATEMATIKE U TERESTRIČKOJ NAVIGACIJI

Terestrička navigacija je metoda vođenja broda korištenjem metoda grafičkog i numeričkog rješavanja zadataka, promatranjem prirodnih i izgrađenih objekata na obali, moru (pomorska svijetla, zvonici, tornjevi, istaknuti vrhovi brda, itd.) te mjerenjem dubine mora. Osim numeričkog rješavanja zadataka u terestričkoj navigaciji se koriste grafički prikazi kao što su pravci, krivulje i kutovi. Svaki pomorac treba znati definicije kursa, azimuta i pramčanog kuta. Kurs se definira kao kut koji zatvara pravac meridijana s linijom kursa, azimut kao kut što ga zatvara pravac meridijana s linijom azimuta, a pramčani kut kao kut što ga zatvara linija kursa sa linijom azimuta. Primjena krivulja u terestričkoj navigaciji se očitava korištenjem loksodromske i ortodromske plovidbe, koje će detaljnije biti opisane u nastavku rada. Osim već spomenutih definicija bitno je znati i što je terestrička pozicija broda. To je sjecište najmanje dviju linija pozicija, dok se mjerenja rade istovremeno ili u razmaku vremena. U pomorskoj navigaciji se nastoji da je pozicija određenja istodobnim opažanjima jer je tako dobivena pozicija točnija od one koja je dobivena u vremenskom razmaku [1].

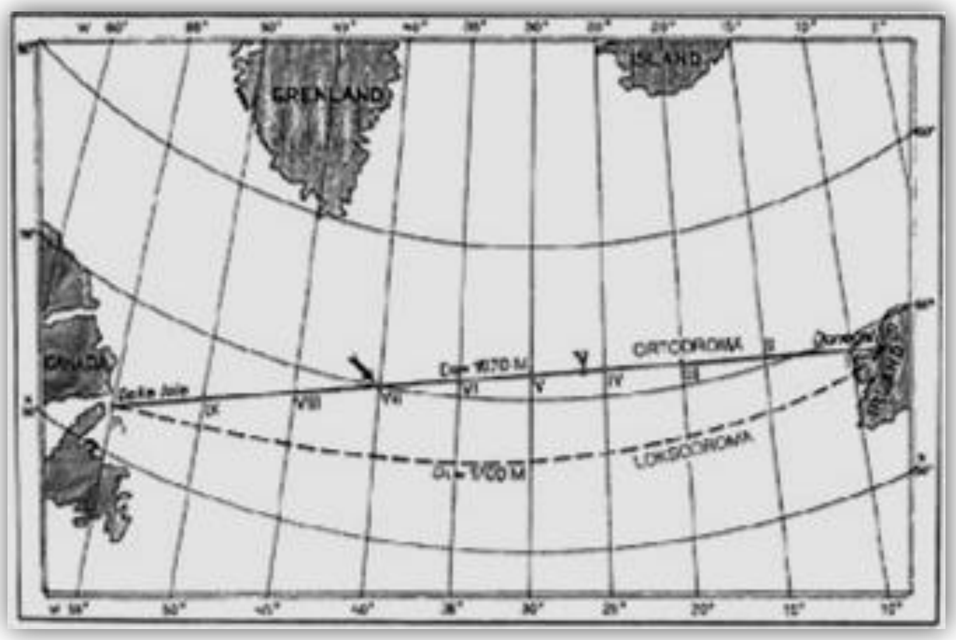
4.1.1. Loksodromska i ortodromska plovidba

U terestričkoj navigaciji primjena krivulja očituje se korištenjem loksodromske i ortodromske plovidbe. Loksodroma je krivulja koja sve meridijane na sferi siječe pod jednakim kutom. Postupno se približava polovima, ali ih nikada ne dostiže.



Slika 2. Prikaz loksodrome i ortodrome na sferi [11]

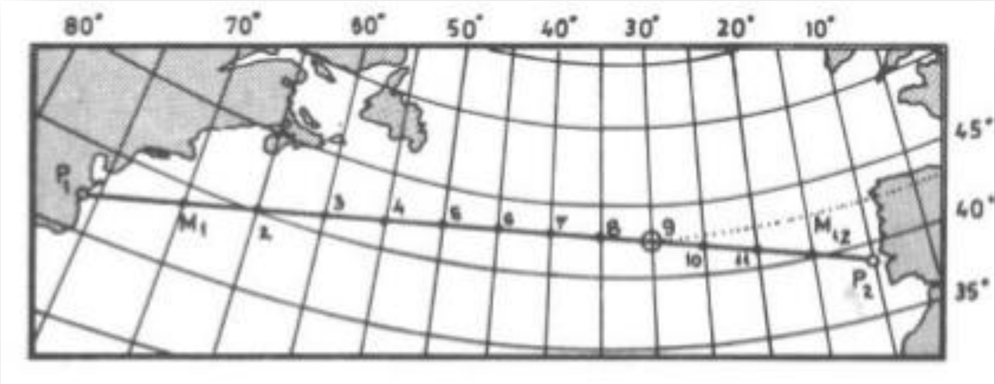
Plovidba po loksodromi je učestala u plovidbenoj praksi jer je pogodna zbog toga što kormilar ne treba mijenjati kurs. Kada brod plovi po loksodromi kaže se da plovi loksodromskim kursom. Jedina mana loksodromske plovidbe je ta što se prijeđe dulji put nego u ortodromskoj plovidbi od točke polaska do točke dolaska što se može uočiti i na slici 2. Loksodromska plovidba se prakticira u plovidbi na manjim udaljenostima, zatvorenim morima, tjesnacima i kanalima. Loksodroma je prikazana na Merkatorovoj karti kao pravac. Upravo zbog tog razloga na Merkatorovoj karti može se izravno vršiti grafičko rješavanje loksodromskih zadataka. Grafičko rješavanje loksodromskih zadataka je najlakše i najbrže, stoga se i često primjenjuje, ali je najmanje točno. Loksodromu se može crtati i na gnomonskoj karti, međutim to se u praksi nikada ne provodi.



Slika 3. Prikaz loksodrome i ortodrome na gnomonskoj karti [11]

Plovidba po ortodromi je kraća od plovidbe po loksodromi, ali problem plovidbe po ortodromi je taj što kormilar mora tijekom plovidbe stalno vršiti promjenu kursa, te tako dovodi brod u velike zemljopisne širine. Ortodroma je stoga krivulja na površini zemlje koja predstavlja najmanju udaljenost između dvije točke na zemlji [1].

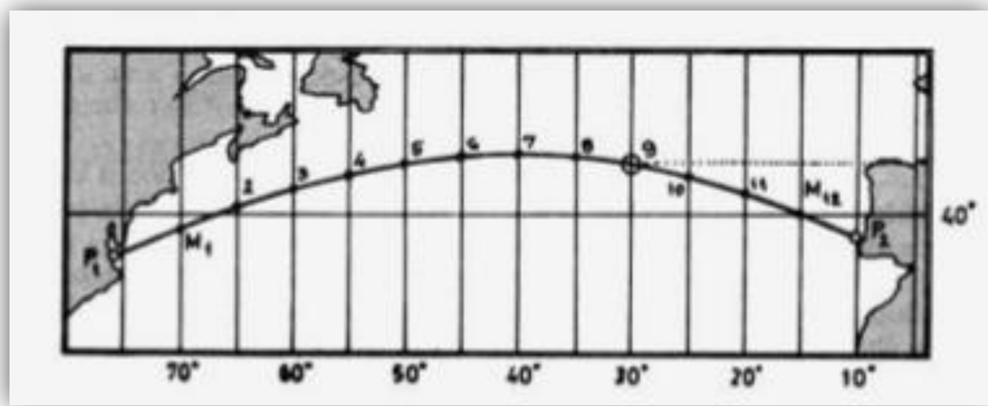
Ortodroma je na Mercatorovoj karti prikazana kao zaobljena krivulja, koja se približava polu, ali ga nikada ne dostiže, dok je na gnonomskoj karti prikazana kao ravna crta. Izravno određivanje elemenata ortodrome može se izravno određivati pomoću gnomonske karte. Međutim takva karta nije pogodna za vođenje broda. Stoga se ortodromu sa gnomonske karte prenosi na Merkatorovu kartu na način koji je prikazan na slikama 4. i 5., te kako je objašnjeno u daljnjem tekstu.



Slika 4. Ortodroma na gnomonskoj karti [11]

Postupak prijenosa ortodrome sa gnomonske karte na Merkatorovu:

1. Ortodroma se dobije tako što se pravcem spoje pozicije polaska i dolaska na gnomonskoj karti.
2. Sa gnomonske karte očitaju se pozicije međutočaka ortodrome.
3. Na Merkatorovu kartu se ucrtavaju pozicije polaska i dolaska, te očitane vrijednosti koordinata međutočaka.
4. Dobivene točke na Merkatorovoj karti se spajaju, te se time dobije niz loksodroma čije se vrijednosti kursa i udaljenosti mogu mjeriti direktno na karti. Moguće su greške u mjerenju, koje ovise o mjerilu Merkatorove karte [1], [11].



Slika 5. Ortodroma na Merkatorovoj karti [11]

4.1.2. Matematički modeli loksodromske plovidbe (loksodromski trokuti)

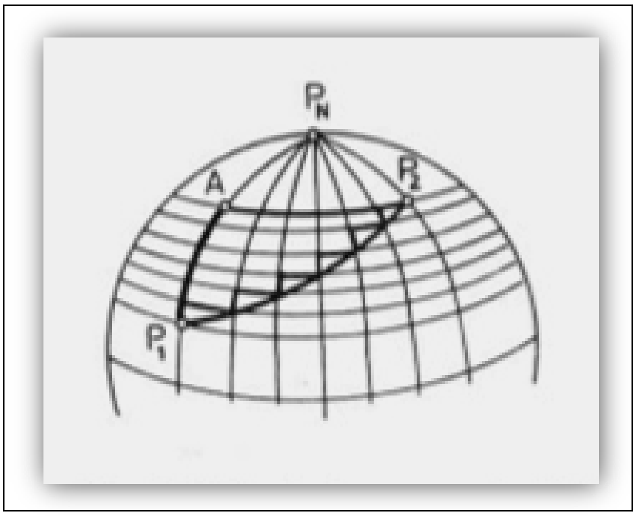
Kod izračuna potrebnih navigacijskih parametara, u loksodromskoj plovidbi, pojavljuju se dva karakteristična loksodromska problema:

1. Problem u kojemu se iz poznatih apsolutnih koordinata pozicije polaska i pozicije dolaska određuje opći loksodromski kurs plovidbe i loksodromska udaljenost
2. Problem u kojemu se iz poznatih apsolutnih koordinata pozicije polaska, poznatog loksodromskog kursa plovidbe i poznate prijeđene loksodromske udaljenosti određuju apsolutne koordinate pozicije dolaska.

Navedeni problemi se rješavaju uz pomoć izraza do kojih se dolazi matematičkim izvodom iz tri loksodromska trokuta [6].

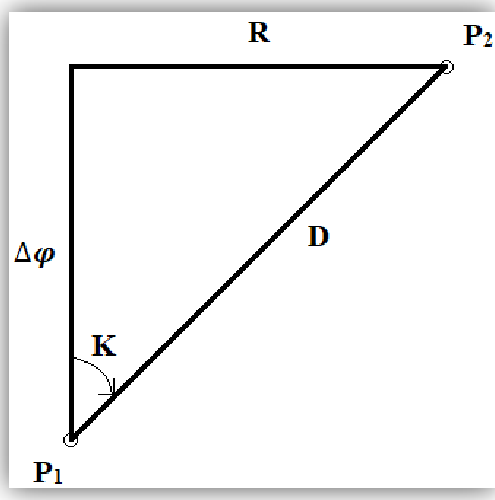
Prvi loksodromski trokut (trokut kursa)

Prvi loksodromski trokut zove se i trokutom kursa. Prilikom plovidbi na manjim udaljenostima svi se elementi plovidbe računaju iz trokuta kursa. Prvi loksodromski trokut (prikazan na slici 7.), dobiva se tako da se iz pozicije polaska (P_1) na Zemlji povuče loksodroma do pozicije dolaska (P_2).



Slika 6. Trokut kursa na sferi [11]

Na temelju slike 6. može se uočiti da izvuče li se prvi loksodromski trokut može ga se predstaviti kao ravni trokut koji čine tri stranice $\Delta\varphi$, R i D.



Slika 7. Prvi loksodromski trokut

Primjenom pravila ravne trigonometrije dobiju se slijedeći izrazi:

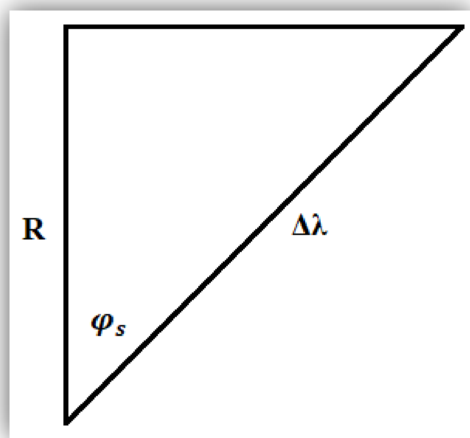
$$\cos K = \frac{\Delta\varphi}{D} \overset{\text{ili}}{\Leftrightarrow} \Delta\varphi = D \cdot \cos K \tag{1}$$

$$\sin K = \frac{R}{D} \overset{ili}{\Leftrightarrow} R = D \cdot \sin K \tag{2}$$

$$\tan K = \frac{R}{\Delta\varphi} \tag{3}$$

Drugi loksodromski trokut (trokut srednje širine)

Drugi loksodromski trokut, prikazan na slici 8., koristi se u teoriji da bi se uspostavila veza između razmaka (R) i razlike zemljopisnih dužina (Δλ).



Slika 8. Drugi loksodromski trokut

Iz trokuta srednje širine pomoću pravila ravne trigonometrije dobiva se izraz:

$$\cos \varphi_s = \frac{R}{\Delta\lambda} \tag{4}$$

Konačni odnos razmaka i razlike zemljopisne dužine dobiva se sređivanjem izraza (4), te glasi:

$$R = \Delta\lambda \cdot \cos \varphi_s, \tag{5}$$

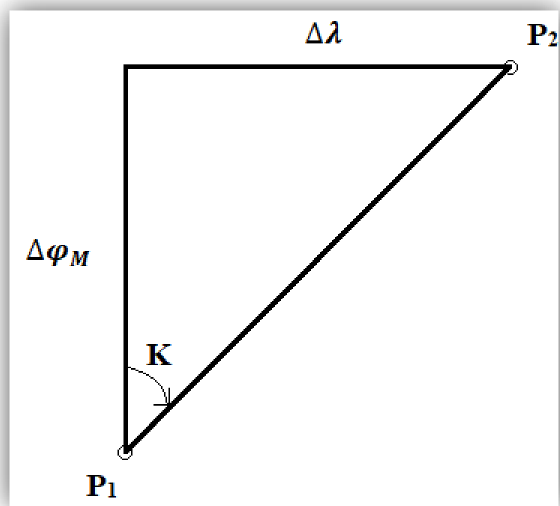
Izraz (5) vrijedi samo u slučaju kada brod plovi po paraleli.

U praksi se izraz (5), koristi uglavnom pri plovidbi na manjim udaljenostima i pri relativno manjoj razlici zemljopisne širine pozicija polaska i dolaska. Stoga se mora vršiti popravak srednje zemljopisne širine pomoću Nautičkih tablica broj 7. Iz tih tablica uzima se popravak (x) dobiven iz izraza:

$$\cos(\varphi_s + x) = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\varphi_M} \tag{6}$$

Treći loksodromski trokut

Treći loksodromski trokut je preslikan sa Merkatorove navigacijske karte, gdje je loksodroma pravac koji spaja točke polaska i dolaska, stoga se još naziva i Merkatorov trokut. Isti se (slika 9.), u praksi, još naziva i točnom metodom, jer konstrukcija Merkatorove karte omogućuje točnost bez obzira na vrijednost udaljenosti.



Slika 9. Merkatorov trokut

Iz slike 9. primjenom pravila ravne trigonometrije dobiva se sljedeći izraz:

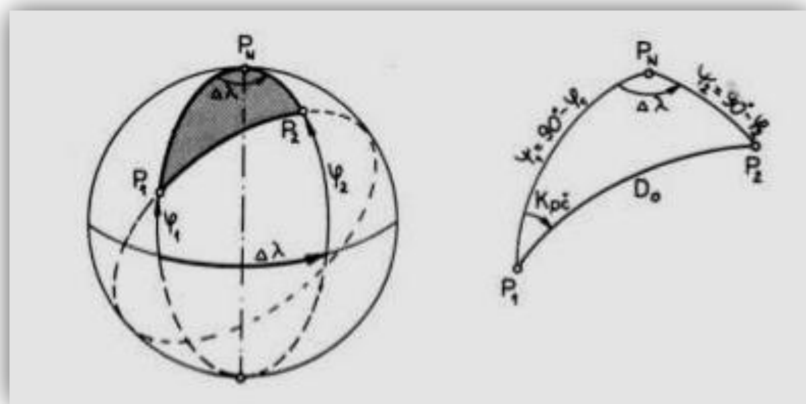
$$\tan K = \frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi_M} \tag{7}$$

4.1.3. Matematički modeli ortodromske plovidbe

Kao što se prethodno u tekstu spominje ortodroma je dio velike kružnice, odnosno to je kružnica koja se nalazi na površini Zemlje, a njezina ravnina prolazi kroz Zemljino središte. U velike kružnice spadaju ekvator i svi meridijani, ali ne i paralele. Stoga dobro poznavanje zakonitosti sferne trigonometrije, koja se primjenjuje na sfernom trokutu, može uvelike olakšati da bi se matematički odredilo elemente ortodromske plovidbe. Sferni trokut može se dobiti samo ako su sve njegove stranice lukovi velikih kružnica, a sama ortodroma je ujedno i luk velike kružnice. Na temelju toga se ortodromska udaljenost, kurs, pozicija vrha, presjecište ortodrome s ekvatorom i njezine međutočke mogu rješavati pomoću pravila sferne trigonometrije.

Određivanje kursa i udaljenosti

Kako bi se što bolje prikazalo određivanje kursa i udaljenosti najbolje je to prikazati pomoću ortodromskog sfernog trokuta (slika 10.). Ortodromski sferni trokut dobije se presjekom meridijana pozicije točke polaska i dolaska te luka ortodrome između P_1 i P_2. Pozicije polaska i dolaska te bliži zemaljski pol čine vrhove ortodromskog sfernog trokuta, a njegove kutove početni kurs K_{pc} i razlika zemljopisne dužine ($\Delta\lambda$) koju predstavlja kut u polu.



Slika 10. Prikaz ortodromskog sfernog trokuta [11]

Pozicije polaska ($\psi_1 = 90° - \varphi_1$) i pozicije dolaska ($\psi_2 = 90° - \varphi_2$) zemljopisne širine te ortodromska udaljenost (D_o) između pozicije P_1 i P_2 su komplementi sa stranicama trokuta.

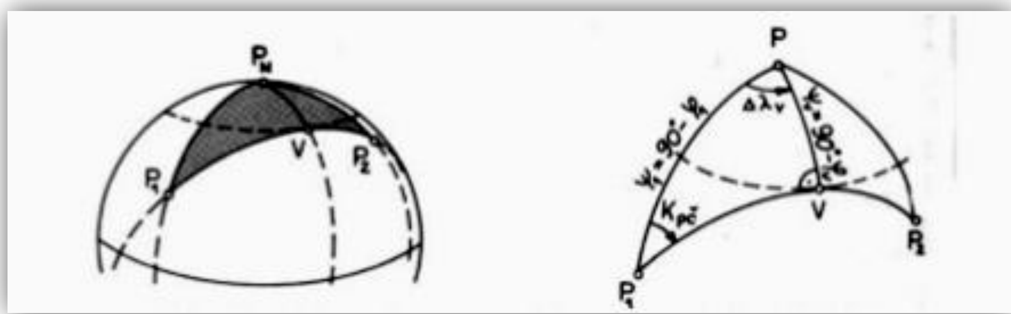
Kako bi se odredio izraz za ortodromsku udaljenost i kurs početni, koristi se cosinusov poučak za stranice. Cosinusov poučak za stranice kaže da je cosinus jedne stranice sfernog trokuta jednak produktu cosinusa preostalih dviju stranica, uvećanih za produkt sinusa tih istih stranica i cosinusa kuta između njih. Na temelju tog poučka dobiju se slijedeći izrazi:

$$\cos D_o = \cos \psi_1 \cdot \cos \psi_2 + \sin \psi_1 \cdot \sin \psi_2 \cdot \cos \Delta\lambda \tag{8}$$

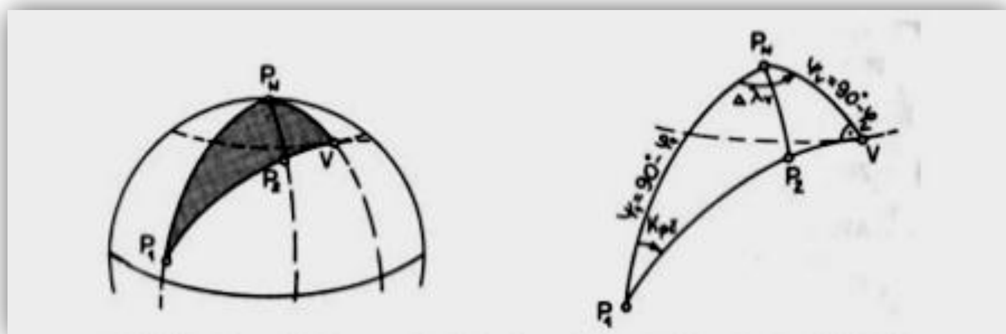
$$\cos D_o = \cos(90° - \varphi_1) \cdot \cos(90° - \varphi_2) + \sin(90° - \varphi_1) \cdot \sin(90° - \varphi_2) \cdot \cos \Delta\lambda \tag{9}$$

Određivanje pozicije vrha i presjecišta ortodrome s ekvatorom

Ortodroma je predstavljena kao krivulja koja se približava polu. Pozicija vrha ortodrome je točka u kojoj se ortodroma najviše približava polu, pozicija vrha je nazvana još i vrhom, tjemenom ili verteksom (V). Ta pozicija je definirana koordinatama zemljopisne širine vrha (φ_v) i zemljopisnom dužinom vrha (λ_v). Postoje dva slučaja pozicije vrha: prvi od njih je kada je vrh ortodrome između pozicije polaska i dolaska, prikazan slikom 11., te drugi kada nije između pozicija polaska i dolaska, prikazan na slici 12.

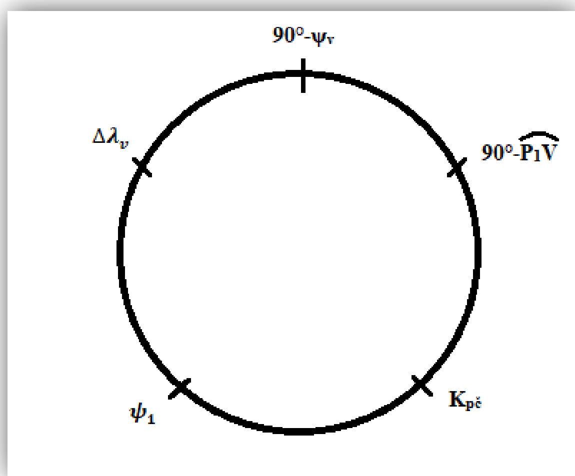


Slika 11. Vrh ortodrome je između pozicija polaska i dolaska [11]



Slika 12. Vrh ortodrome nije između pozicija polaska i dolaska [11]

Ortodromski trokut se pretvara u pravokutni sferni trokut (slike 11. i 12.). Za rješavanje zadataka ortodromske plovidbe potrebno je primijeniti Napierovo pravilo za pravokutni sferni trokut. Sukladno pravilu dobit će se Napierovo kolo (slika 13.).



Slika 13.Napierovo kolo

Prilikom rješavanja zadataka ortodromske plovidbe poznata su dva elementa:

1. komplement geografske širine polazne pozicije ($90°-\psi_v$)
2. početni ortodromski kurs ($K_{pč}$)

Sa tim elementima po Napierovim pravilima mogu se izračunati ostali elementi trokuta. Primjenom tih pravila, za geografsku širinu ortodrome slijedi:

$$\cos(90° - \varphi_v) = \sin\psi_1 \cdot \sin K_{pč} \tag{10}$$

Budući je:

$$\cos(90° - \varphi_v) = \cos(90° - 90° + \varphi_v) = \cos\varphi_v \tag{11}$$

$$\text{i} \quad \sin\psi_1 = \sin(90° - \varphi_1) = \cos\varphi_1, \tag{12}$$

iz tog proizlazi da je:

$$\cos\varphi_v = \cos\varphi_1 \cdot \sin K_{pč} \tag{13}$$

Zatim se može odrediti izraz za razliku zemljopisne dužine vrha ($\Delta\lambda_v$):

$$\cot\Delta\lambda_v = \sin\varphi_1 \cdot \tan K_{pč} \tag{14}$$

Pravila za određivanje zemljopisne dužine pozicije vrha:

1. Ako je $K_{pč} < 180°$, tada je $\lambda_v = (\pm\lambda_1) + (\pm\Delta\lambda_v)$ (15)

2. Ako je $K_{pč} > 180°$, tada je $\lambda_v = (\pm\lambda_1) - (\pm\Delta\lambda_v)$ (16)

Za određivanje razlike zemljopisne dužine vrha može se primjenom Napierovih pravila, koristeći zemljopisnu širinu vrha dobiti izraz:

$$\cos\Delta\lambda_v = \tan\varphi_1 \cdot \cot\varphi_v \tag{17}$$

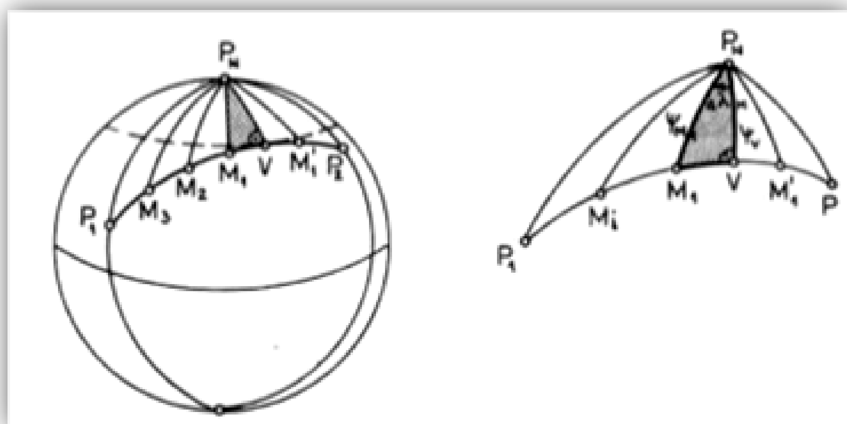
Nakon što se odredio položaj vrha ortodrome, može se vrlo lako odrediti njezino presjecište s ekvatorom. Zemljopisna širina kod presijecanja ortodrome s ekvatorom iznosi φ_E=0°, te se zemljopisna širina određuje prema izrazu:

$$\lambda_E = (\pm\lambda_v) \pm 90° \tag{18}$$

gdje se dodaje 90° ako je $K_{ppč} < 180°$, a oduzima 90° ako je $K_{ppč} > 180°$ [11], [35].

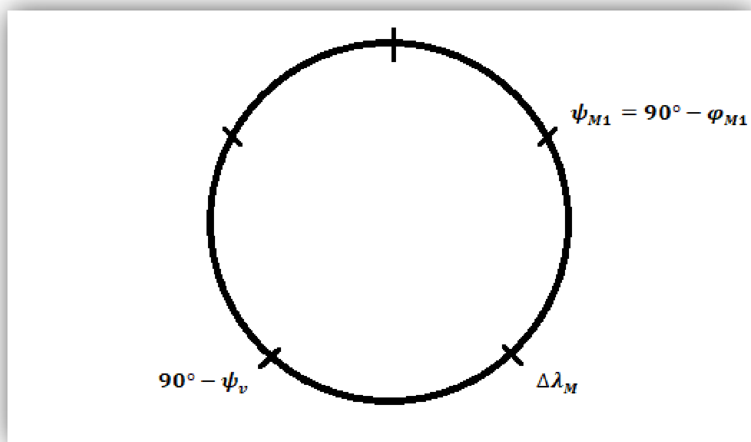
Određivanje međutočaka

Međutočke na ortodromi (slika 14.) su podijeljene ravnomjerno sa lijeve i desne strane od vrha ortodrome, te su već unaprijed određeni $\Delta\lambda_M$. Vrijednost $\Delta\lambda_M$ se u praksi odabire proizvoljno, najčešće od 3' do 15'.



Slika14. Međutočke ortodrome [11]

Kod određivanja međutočaka ortodrome koristi se pravokutni sferni trokut čiji su vrhovi bliži polu ortodrome (P_N), vrh ortodrome (V) i promatrana međutočka (M). Zemljopisna širina međutočaka ortodrome je identična lijevo i desno od vrha, dok se njihova zemljopisna dužina razlikuje za dvostruku vrijednost $\Delta\lambda_M$. Za ove izračune mora se ponovno koristiti Napierovo pravilo (slika 15.) za pravokutne sferne trokute.



Slika 15. Napierovo kolo

Primjenom pravila na Napierovo kolo slijedi:

$$\cos \Delta\lambda_M = \cot \psi_{M1} \cdot \cot(90° - \psi_v) \tag{19}$$

$$\tan \varphi_{M1} = \tan \varphi_v \cdot \cos \Delta\lambda_M \tag{20}$$

Izraz (20) predstavlja izraz za računanje zemljopisne širine pojedine međutočke. Njihove zemljopisne dužine računa se prema izrazu:

$$\lambda_M = (\pm\lambda_v) \pm (\Delta\lambda_M) \tag{21}$$

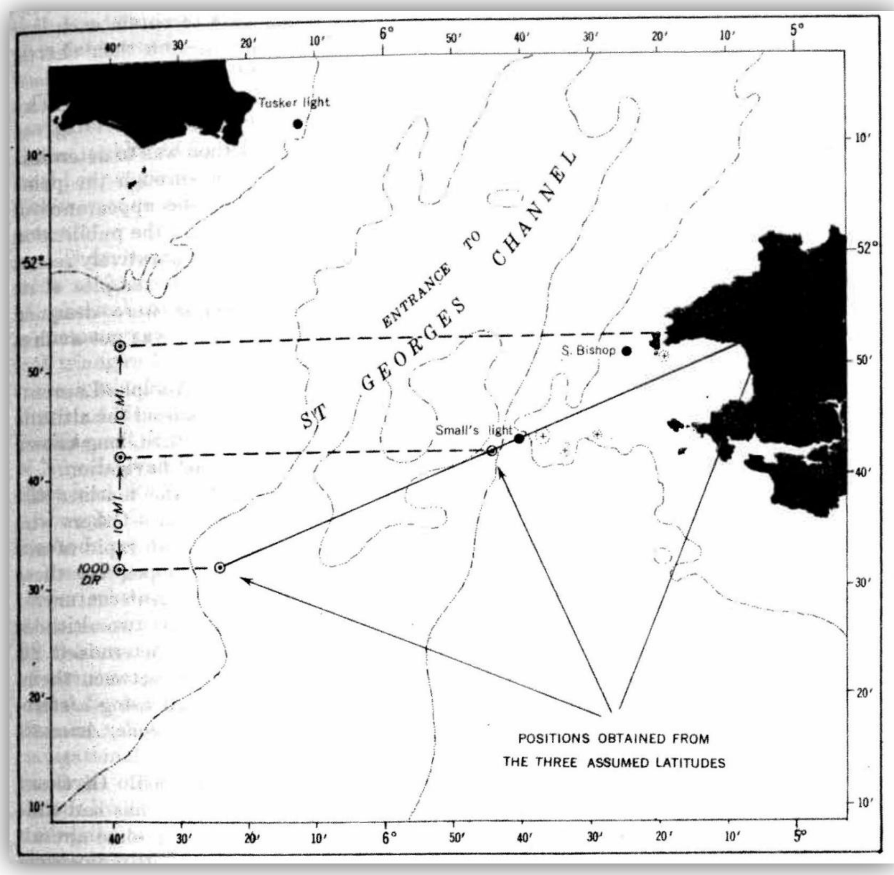
U izrazu (21) se zbraja ili oduzima $\Delta\lambda_M$ od vrijednosti zemljopisne dužine vrha [11], [35].

4.2. PRIMJENA U ASTRONOMSKOJNAVIGACIJI

Astronomska navigacija je klasična grana navigacije, koja matematičkim metodama (algebra, geometrija te sferna trigonometrija) pomoću sekstanta, kronometra, nautičkog godišnjaka te nautičkih tablica nalazi jednu ili više stajnica. Postoji više metoda za dobivanje pozicije broda koristeći visine nebeskih tijela. U praksi se najčešće koristi visinska metoda, a u rijetkim slučajevima Dozijerova (izravna) metoda. Osim već spomenutih metoda postoje i širinska (Bordina) metoda, duljinska (Johnsonova) te metoda sekante (Sumnerova metoda).

4.2.1. Sumnerova metoda

Može se reći da se čitava moderna astronomska navigacija većinom zasniva na Sumnerovoj metodi (metodi sekante). Ova metoda sasvim slučajno je otkrivena za vrijeme putovanja američkog kapetana Thomasa Sumnera, iz Charlestona, Južne Karoline za Greenock, Škotsku, u prosincu 1837. godine. Tih dana na putovanju nisu samo vremenski uvjeti bili loši već i vidljivost, pa je kapetan Sumner plovio temeljem zbrojene navigacije. Odnosno on je izračunao tri točke na pravcu (luku) pozicije. Sa geometrijskog gledišta pravac (stajnica) određen je sa dvije ili jednom točkom i smjerom. Možda je Sumnerova metoda nekima poznatija pod nazivom sekante metoda, upravo zato što pravac koji spaja dvije točke na kružnici nazivamo sekante. Isto tako kapetan T. Sumner točke na kružnici odredio je procjenjivanjem njihove zemljopisne širine i računanjem zemljopisne dužine. Takav način procjenjivanja i računanja daje najbolje rezultate u blizini prvog vertikala, a najlošije u blizini meridijana [10].



Slika 16. Prikaz metode sekante [22]

Koriste se sljedeći izrazi:

$$\lambda = s - S \tag{22}$$

$$\sin^2 \frac{s}{2} = \cos\varepsilon \cdot \sin(\varepsilon - V) \cdot \sec\varphi \cdot \cos\sec p \tag{23}$$

$$\varepsilon = \frac{\varphi + p + V}{2} \tag{24}$$

gdje je:

λ	zemljopisna dužina
φ	zemljopisna širina
S	grinički satni kut nebeskog tijela
s	mjesni satni kut nebeskog tijela
p	polarna udaljenost ($p = 90° - \delta$)

4.2.2. Pravac položaja po metodi tangente

Točku broda ili stajalište opažača dobiva se pomoću terestričke projekcije zenita na zemljinoj površini. Gledano sa pozicije broda prema terestričkoj projekciji nebeskog tijela uočava se da je smjer vertikalne kružnice zapravo smjer azimuta tog tijela. Također, prema pravilima iz geometrije poznato je da je tangenta u svakoj točki neke kružnice uvijek okomita na polumjer, a u ovom slučaju okomita je na luk velike kružnice. Ukoliko se za pravac položaja koristi tangenta na kružnici u nekoj točki, tada je ona uvijek okomita na smjer azimuta. Zbog toga je poželjno ustanoviti koje su koordinate neke točke na kružnici položaja i za tu točku izračunati azimut. Koordinate određenih točaka na kružnici položaja može se dobiti pomoću širinske, duljinske i visinske metode.

Bordijeva metoda geografske širine je pogodna za tijela u blizini meridijana, a loša za tijela u blizini prve vertikale. Kod ove metode procjenjuje se zemljopisnu dužinu pomoću zbrojene pozicije, dok zemljopisnu širinu koja je glavna točka širinske metode uz azimut računa se za već procijenjenu zemljopisnu dužinu. Stajnica prolazi kroz dobivenu točku i ona je okomita na azimut.

$$\cos(\varphi - x) = \frac{\sin Vp \cdot \sin x}{\sin\delta} \tag{25}$$

$$\tan x = \frac{\tan\delta}{\cos s} \tag{26}$$

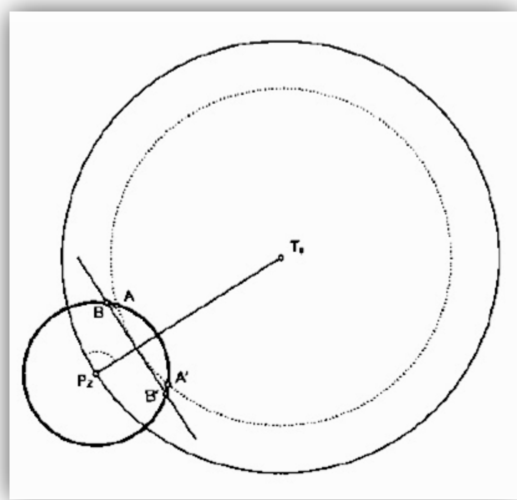
$$\cos\omega = \frac{\sin\delta - \sin\varphi \cdot \sin Vp}{\cos\varphi \cdot \cos Vp} \tag{27}$$

Johnsonova metoda geografske dužine je pogodna za tijela u blizini prve vertikale, a loša za tijela u blizini meridijana. Kod ove metode procjenjuje se zemljopisna širina pomoću zbrojene pozicije, te se računa zemljopisna dužina za tu procijenjenu zemljopisnu širinu uz pripadajući azimut. Stajnica prolazi kroz dobivenu točku i također je okomita na azimut.

$$\cos s = \frac{\sin Vp - \sin\varphi \cdot \sin\delta}{\cos\varphi \cdot \cos\delta} \tag{28}$$

Visinska metoda je otkrivena 1875. godine, a svoju široku primjenu našla je tek u 20.st. Visinska metoda danas je jedina metoda koja se koristi u praksi. Za otkrivanje ove metode zaslužan je francuski kapetan Marcq de Saint Hilaire. Njemu je zbog tog otkrića čak i dodijeljen čin admirala.

Visinska metoda pak koristi razliku između visine prave (v_p) i visine računate (v_r), nebeskog tijela u pravcu azimuta. Te postoje dva elementa koja određuju Hilareov pravac položaja, a to su azimut i visinska razlika (ΔV).



Slika 17. Visinska metoda [10]

Na slici 17. točka P_z predstavlja zbrojenu poziciju, a točka T_S predstavlja terestričku projekciju nebeskog tijela. Zatim luk kružnice AA' označava luk pozicije, dok pravac okomit na azimut je pravac pozicije. Stoga sa koordinatama zbrojene pozicije se računa visina, tj. zenitna udaljenost:

$$z_r = 90° - V_p. \tag{29}$$

Mjerenjem visine nebeskog tijela čija se terestrička projekcija nalazi u točki T_s zenitna udaljenost se računa:

$$z_p = 90° - V_p \tag{30}$$

Razlika između točaka P_z i P_p iznosi:

$$z_r - z_p = (90° - V_r) - \left(90° - V_p\right) = 90° - V_r - 90° + V_p = V_p - V_r = \Delta V \tag{31}$$

$$z_r - z_p = \Delta V \tag{32}$$

Prava i zbrojena pozicija se razlikuju za vrijednost visine prave i visine računate, u pravcu azimuta, pa se za tu vrijednost može ispraviti vrijednost zbrojene pozicije. Točka u kojoj se sijeku pravac pozicije i pravac azimuta zove se rektificirana točka.

Postupak crtanja stajnice kod visinske metode je sljedeći:

1. Izmjeri se visinu nebeskog tijela te se zabilježi vrijeme na kronometru

2. Izmjerena visina (V_i) se ispravlja za vrijednosti depresije i refrakcije (te paralakse i polumjera za bliža tijela) te se tako dobije prava visina (V_p), a srednje griničko vrijeme (UT) se računa tako da se kronometarsko vrijeme (T_k) ispravi za stanje kronometra (S_t). U slučaju kada je zadano lokalno vrijeme motrenja (t_x), srednje griničko vrijeme se računa:

$$UT = t_x - (\pm x), \tag{33}$$

gdje je (x) vremenska zona.

3. Sa izračunatim srednjim griničkim vremenom (UT) ulazi se u Nautički godišnjak za zadani datum te se uzimaju mjesno ekvatorske koordinate deklinacija (δ) i griničku satni kut (S). Za zvijezde griničku satni kut se dobiva tako da vrijednosti griničkog satnog kuta proljetne točke pribroji surektascenzija (360°-α). Mjesni satni kut (s) se dobiva tako da se griničkom satnom kutu pribraja zemljopisna dužina zbrojene pozicije (λ_z). Mjesni satni kut se razlikuje od stvarnog za veličinu proporcijonalnu pogreški zemljopisne dužine.

4. S deklinacijom (δ), zemljopisnom širinom zbrojene pozicije (φ_z) i mjesnim satnik kutom (s) računa se visina nebeskog tijela (V_r), koja bi bila izmjerena kad bi se opažač uistinu nalazio u zbrojenoj poziciji. Visina (V_r) se izračunava iz izraza:

$$\sin V_r = \sin\varphi \cdot \sin\delta + \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos s \tag{34}$$

5. Visinu računatu (V_r) potrebno je usporediti sa visinom pravom (V_p). Kad bi se opažač uistinu nalazio na zbrojenoj poziciji (P_z) i da su zemljopisna širina i dužina unesene u izračun bez pogreški, razlike između visine računate (V_r) i visine prave (V_p) nebi bilo. Međutim u praksi, opažač se češće nalazi na poziciji različitoj od zbrojene, pa će se stoga pokazat razlika između računate (V_r) i prave visine (V_p):

$$\Delta V = V_p - V_r \tag{35}$$

Ako je razlika prevelika (preko 1°) rezultat može biti netočan. Razlika između računate (V_r) i prave (V_p) visine najčešće se izražava u minutama.

6. Koordinate zbrojene pozicije se ispravljaju za razliku visina u pravcu azimuta, pa je potrebno izračunati vrijednost azimuta po izrazu:

$$\cos \omega_r = \frac{\sin \delta - \sin \varphi \cdot \sin V_r}{\cos \varphi \cdot \cos V_r} \tag{36}$$

Azimut se ucrtava na kartu od položaja zbrojene pozicije, te stoga u račun azimuta moraju ući one vrijednosti koje odgovaraju koordinatama zbrojene pozicije, tj. vrijednost računate, a ne visine prave. Prema gornjem izrazu se računa azimut, a strana horizonta na kojoj se nalazi terestrička projekcija određuje se na temelju mjesnog satnog kuta. S obzirom da se satni kut počinje računati prilikom prolaska nebeskog tijela kroz gornji meridijan, a azimut prilikom prolaska nebeskog tijela kroz donji meridijan, te se dvije vrijednosti razlikuju za 180°, pa se za izračun pravog azimuta koriste sljedeća pravila:

- Ako je mjesni satni kut veći od 180°, izračunati azimut je jednak stvarnoj vrijednosti azimuta ($\omega_p = \omega_r$), te se nebesko tijelo nalazi na istočnoj strani horizonta,
- Ako je mjesni satni kut manji od 180°, izračunatu vrijednost azimuta potrebno je odbiti od 360°, te se nebesko tijelo nalazi na zapadnoj strani horizonta

$$\omega_p = 360° - \omega_r \tag{37}$$

Azimut je također moguće izračunati pomoću "ABC tablica" ili nekih sličnih tablica.

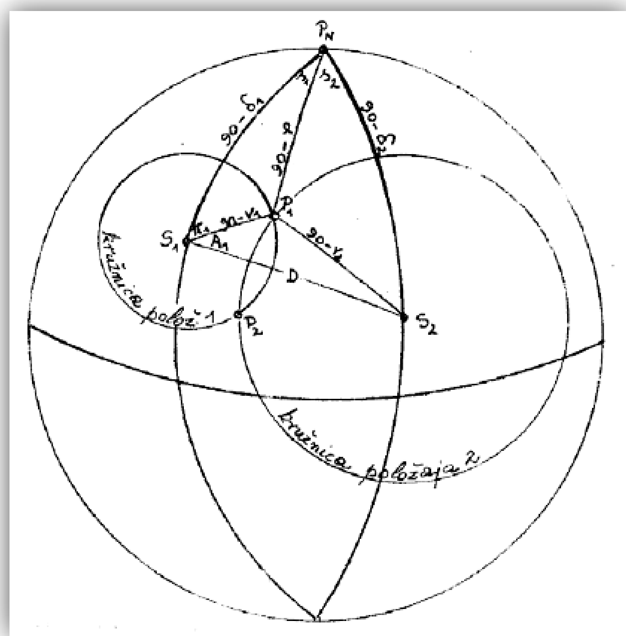
7. Iz zbrojene pozicije, ucrtava se pravac azimuta na Mercatovoj, pomoćnoj ili bijeloj karti, te se na tom pravcu nanose vrijednost razlike visina (ΔV):

- Ako je razlika visina pozitivna, njena vrijednost se nanosi na pravac azimuta u smjeru pripadajućeg azimuta
- Ako je razlika visina negativna, njena vrijednost se nanosi na pravac azimuta u suprotnom smjeru od pripadajućeg azimuta

Stajnicu se dobije tako da kroz dobivenu točku povuče pravac koji je okomit na pravac azimuta, ali ako se radi na bijeloj karti potrebno je definirati mjerilo [10].

4.2.3. Izravna (Dozierova) metoda

Metodu kojom se određuje pozicija broda rješavanjem sustava trigonometrijskih jednadžbi po nepoznanicama razvio je Charles T. Dozier 1949. godine. Do pozicije u ovoj metodi se dolazi tako da se ucrtaju dvije kružnice položaja, te se tako nađe pozicija u jednom od dva sjecišta tih kružnica. Ova metoda se naziva izravnom metodom jer se kod nje matematičkim putem bez grafičkog prikaza dolazi do pozicije.



Slika 18. Dozierova metoda [10]

Iz slike 18. može se iščitati:

S_1 - terestrička projekcija prvog nebeskog tijela

S_2 - terestrička projekcija drugog nebeskog tijela

$$\Delta S = S_1 - S_2 = S_\gamma + \lambda + (360° - \alpha_1) - S_\gamma - \lambda - (360° - \alpha_2)$$
$$= (360° - \alpha_1) - (360° - \alpha_2) \qquad (38)$$

Iz trokuta $P_nS_1S_2$:

$$\cos D = \sin\delta_1 \cdot \sin\delta_2 + \cos\delta_1 \cdot \cos\delta_2 \cos\Delta S \qquad (39)$$

$$\cos\alpha = \frac{\sin\delta_2 - \sin\delta_1 \cdot \cos D}{\cos\delta_1 \cdot \sin D} \qquad (40)$$

Iz trokuta $S_1P_1S_2$:

$$\cos \beta = \frac{\sin V_2 - \sin V_1 \cdot \cos D}{\cos V_1 \cdot \sin D} \tag{41}$$

$$\pi = \alpha + \beta \tag{42}$$

ili

$$\pi = \alpha - \beta \tag{43}$$

Iz trokuta $P_n P_1 S_1$:

$$\sin \varphi = \sin \delta_1 \cdot \sin V_1 + \cos \delta_1 \cdot \cos V_1 \cdot \cos \pi \tag{44}$$

Računa se zemljopisna širina za oba (π) i odabire se ona koja je bliža zbrojenoj širini. Osnovni je razlog taj što se dvije kružnice uvijek sijeku u dvije točke. Nakon izračuna zemljopisne širine računa se zemljopisna dužina po izrazu (46):

$$\cos s_1 = \frac{\sin V_1 - \sin \delta_1 \cdot \sin \varphi}{\cos \delta_1 \cdot \cos \varphi} \tag{45}$$

$$\lambda = s_1 - S_1. \tag{46}$$

5. STABILITET BRODA

Stabilitet ili stabilnost broda je sposobnost da se brod odupire negativnim utjecajima kao što su gibanje mora i zraka koji pokušavaju brod pomaknuti iz stanja ravnoteže. Kako bi stabilnost broda bila što sigurnija bitne su dvije stavke, a to su razmještaj težine i forma trupa broda. O formi trupa odlučuje brodogradilište, a za razmještaj težine zaslužan je zapovjednik broda. Raspored tereta na brodu treba biti usklađen sa sposobnošću forme broda da generira stabilizirajući moment koji će brod nakon nagibanja vanjskim silama vratiti u uspravno stanje. Forma broda na više načina utječe na stabilitet. Najveću ulogu kod malih nagiba ima širina broda na vodenoj liniji kao i punoća vodene linije. Povećanjem širine za isti kut nagibanja povećava se moment uronjenog i izronjenog klina i to povećanjem kraka i povećanjem volumena klinova. Jedno od osnovnih svojstava koje brod mora posjedovati je plovnost u položaju stabilne ravnoteže. Brod bez dovoljne stabilnosti se može prevrnuti pod utjecajem vanjskih sila i momenata koji potječu od vjetra, valova ili nekih drugih vanjskih faktora, što može imati katastrofalne posljedice [12].

5.1. OSNOVNI POJMOVI BRODSKOG STABILITETA

Kod brodskog stabiliteta razlikuje se nekoliko osnovnih pojmova koje treba znati. To su:

Istisnina (deplasman) - to je masa vode koju brod istisne da bi mogao plutati. Masa istisnute vode je jednaka masi njegove vlastite težine, te se prikazuje simbolima Δ, D ili W.

Deadweight - je mjera ukupnog kapaciteta nosivosti broda. Deadweight je ukupna težina tereta, balasta, goriva, maziva, svježe vode, zaliha hrane i rezervnih dijelova, posade i dr. (bez težine praznog broda). Deplasman - težina praznog broda = deadweight.

Tona po centimetru (engl. *Tons Per Centimeter Immersion* - TPC) - to je mjera koja pokazuje koliko tona tereta se treba ukrcati na brod da bi uronuo tj. da bi se njegov gaz promijenio za 1 cm. TPC se mijenja sa promjenom gaza i trima broda.

Okomice (perpendikulari) - su konstrukcijske vertikalne linije naprijed i nazad, te služe za proračunske svrhe, te se udaljenost između okomica često koristi u iste svrhe, a označava se sa kraticom LPP (eng. *Lenght between perpendiculars* - LPP). Postoji pramčana i krmena okomica. Pramčana okomica je okomita na crtu ljetnog gaza i prolazi prednjim bridom pramčane stative, a krmena okomica je okomita na crtu ljetnog gaza i prolazi osovinom kormila.

Sredina broda - u sredini broda između okomica se nalazi tzv. sredina duljine broda. Sredina duljine broda se nalazi dijeljenjem udaljenosti između okomica na dva dijela. Polovina duljine često se naziva L/2

Uzdužni centar gravitacije - (engl. *Longitudinal Centre of Gravity* - LCG) ovisi o uzdužnom razmještaju mase tereta na brodu. Mjeri se od krmene okomice i u tom slučaju ima pozitivan predznak. S tim da ako se mjeri od glavnog rebra onda može imati pozitivan ili negativan predznak, a što ovisi o tom da li je LCG ispred ili iza sredine broda.

Uzdužni centar uzgona - (engl. *Longitudinal Centre of Buoyance* - LCB) su sile uzgona koje djeluju oko cijelog podvodnog dijela broda, a djeluju vertikalno prema gore, u jednoj točki. LCB se mjeri od krmene okomice.

Uzdužni centar plutanja - (engl. *Longitudinal Centre of Flotation* - LCF) prilikom promjene trima, brod se rotira oko poprečne osi, a koja prolazi oko stvarne trenutne vodene linije. Udaljenost centra plutanja mjeri se od sredine broda ili od krmene okomice. LCF se dobiva iz tablice ili iz krivulje hidrostatskih podataka broda za zadano stanje krcanja [13].

5.2. PODJELA STABILITETA

Stabilitet broda se može podijeliti s obzirom na nagibanje na poprečni i uzdužni stabilitet. Poprečni stabilitet broda se javlja prilikom nagibanja broda oko uzdužne osi na lijevu i desnu stranu. Dok se uzdužni stabilitet javlja prilikom nagibanja broda oko poprečne osi.

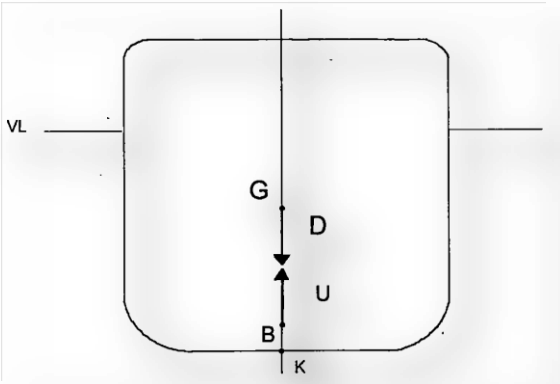
Stabilitet broda se odupire silama i momentima koji nastoje izbaciti brod iz ravnoteže, sile i momenti na brod mogu djelovati statički (stalno i nepromjenljivo) te dinamički (trenutno i sa prekidima). Kada na brod djeluju statičke sile kao što su ukrcani teret, pomak tereta, balastne vode, prodor vode i sl., stabilitet koji se odupire takvom djelovanju sila i momenata naziva se statičkim stabilitetom. Dok stabilitet koji se suprotstavlja vanjskim silama ili momentima kao što su vjetar ili valovi se naziva dinamičkim stabilitetom [12].

5.3. UVJETI PLOVNOSTI

Plovnost je sposobnost tijela da neometano pluta na tekućini (bez dodirne točke sa dnom ili nekim drugim tijelom). Na plovnost utječu karakteristike tijela koje pluta kao što su njegov oblik, masa i težište, te gustoća tekućine u kojoj tijelo pluta.

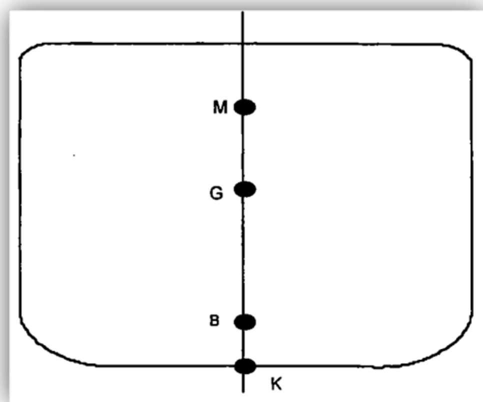
Da bi brod posjedovao plovnost u stanju stabilne ravnoteže mora zadovoljavati tri uvjeta plovnosti.

1. Prvi uvjet plovnosti je taj da ukupna masa broda D mora biti jednaka ukupnoj masi istisnute tekućine u kojoj brod pliva, to jest uzgonu U (slika 19.).



Slika 19. Prvi uvjet plovnosti [12]

2. Drugi uvjet plovnosti je taj da težište sile težine G (engl. *gravity*) i težište sile uzgona B (engl. *buoyancy*) moraju biti okomiti jedno na drugo, a njihova spojnica mora biti okomita na plovnu vodenu liniju VL.
3. Treći uvjet plovnosti zahtjeva da se težište sile težine G mora nalaziti ispod točke metacentra M. Dok prva dva uvjeta zahtijevaju da tijelo koje pluta na vodi bude u stanju ravnoteže, trećim se uvjetom ispunjava zahtjev stabilne ravnoteže prikazan na slici 20. [25].

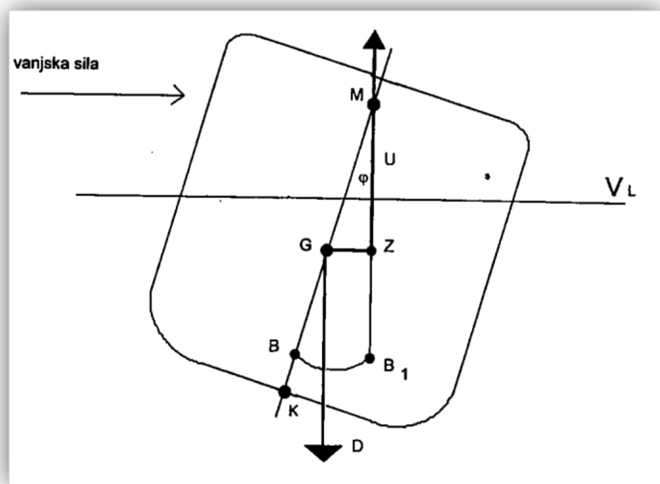


Slika 20. Položaj stabilne ravnoteže [12]

5.4. MOMENT STATIČKE STABILNOSTI BRODA

Moment statičke stabilnosti broda se naziva moment sprega sila, uzgona i težine broda, koji se suprotstavlja nagibanju. Prilikom djelovanja vanjskih sila na brod on će se nagnuti te dolazi do poremećaja stabilne ravnoteže. Takvim poremećajima ravnoteže brod se nastoji vratiti u uspravni položaj čim prestane djelovanje sile koja ga je nagnula.

Brod se uslijed djelovanja vanjske sile nagne za neki kut φ prikazano na slici 21. Prilikom nagiba njegov podvodni volumen mijenja svoj oblik. Težište istisnine B prilikom nagiba pomaknut će se u položaj B_1. Sila istisnine djeluje iz B_1 okomito prema gore. Točku u kojoj smjer sile uzgona siječe uzdužnu simetralu broda naziva se metacentar, M. Težište težine G (težište broda) je ispod M, kao težište trupa broda i svih težina koje brod nosi, ostalo u svom početnom položaju. Sila težina, tj. deplasman broda D, djeluje okomito prema dolje iz G.



Slika 21. Sprega sila uspravljanja broda [12]

Nagibom broda nastaje sprega sila koje, prema prvom zakonu plovnosti, moraju biti iste:

$$D = U = V \cdot \gamma \tag{47}$$

gdje je:

V = volumen uronjenog dijela broda

γ = gustoća vode u kojoj brod pliva.

Metacentar se nalazi u položaju u kojem je bio prije nagiba broda. Udaljenost između točaka G i M je početna metacentarska visina, a moment je početni moment statičke stabilnosti.

$$MST = D \cdot GZ \tag{48}$$

Vrijednost poluge uspravljanja broda (GZ poluge) za male kutove nagiba (do 12°) mogu se izračunati iz odnosa početne metacentarske visine i kuta nagiba iz trokuta GZM:

$$\sin \varphi = \frac{GZ}{GM} \tag{49}$$

$$GZ = GM \cdot \sin \varphi \tag{50}$$

$$Mst = D \cdot GM \sin \varphi \tag{51}$$

Iz izraza (51) može se uočiti da kod malih kutova nagiba za bilo koji određeni deplasman moment statičke stabilnosti direktno ovisi o početnoj metacentarskoj visini GM. Kaže se za brod da je tvrd kada je kod velike početne metacentarske visine te se brzo vraća u uspravan položaj, a da je brod spor kaže se kada je kod male GM te se tada sporo vraća u uspravan položaj.

Međutim, moment statičke stabilnosti ne ovisi samo o metacentarskoj visini, nego o deplasmanu, te o kutu nagiba. Dva potpuno različita broda mogu imati istu metacentarsku visinu, ali različite deplasmane, pa će i njihov moment statičke stabilnosti biti različit.

Promjenom relativnog položaja točaka B, G, M, utječe na početnu stabilnost broda ne samo kada je brod u uspravnom stanju, nego i kada je nagnut. Zbog njihovog međusobnog položaja brod može biti:

- stabilan
- labilan
- indiferentan (neutralan) [12].

6. ZAKLJUČAK

Matematika je ljudska djelatnost koja postoji već tisućama godina i svatko je, svjesno ili nesvjesno, svakodnevno rabi. Ona potiče ljude na razmišljanje i razvija njihovu logiku. Matematika i pomorstvo se mogu paralelno gledati u svom nastajanju, koje se odvija gotovo u isto vrijeme.

Kako pomorstvo napreduje brodovi koji se grade su sve veći, okretniji, brži i moderniji. Da bi se rukovanja tim brodovima mogla olakšati i plovidba na njima učiniti sigurnijom, neophodno je znanje i primjena matematike. Zato se i kaže da je matematika važno oruđe u rukama pomoraca. Pomoću nje može se doći do značajnih izračuna koji su bitni u ovoj djelatnosti.

U ovom radu zadatak je bio objasniti zašto baš matematika ima tako važnu ulogu u pomorstvu. Na samom početku rada opisana je definicija, podjela i razvoj matematike, a potom objašnjeno i kako se ona može primijeniti u terestričkoj i astronomskoj navigaciji, te u proračunima vezanim za prijevoz tereta i stabilitet broda.

Stoga je, primjena matematike u terestričkoj navigaciji, u ovom radu opisana uporabom velikih krugova (loksodrome i ortodrome), te njihovih matematičkih modela. Pod tim modelima se podrazumijevaju tri loksodromska trokuta, određivanje kursa i udaljenosti, određivanje pozicije vrha i presjecišta ortodrome s ekvatorom, te određivanje međutočaka. U astronomskoj navigaciji primjena matematike očituje se korištenjem raznih matematičkih izraza te grafičkih prikaza u metodama sekante (prva metoda) i tangente. Primjena se vidi i u izravnoj metodi (Dozierova) u kojoj se samim matematičkim izrazima dolazi do pozicije broda. Osim primjene u navigaciji, matematički izrazi koriste se i za proračune vezane za stabilitet broda te njegovu sigurnost u plovidbi.

Na kraju ovog rada može se zaključiti da osoba zaposlena na brodu, pomorac, mora znati kako primijeniti matematiku u svom poslu. Stabilitet broda, navigacija, meteorologija, itd., samo su neki segmenti koji bi bili nerješivi bez znanja matematike.

LITERATURA

[1] Brčić, D.: *Terestrička navigacija; Metode plovljenja,* Pomorski fakultet u Rijeci, 2014. URL: http://www.pfri.uniri.hr/~brcic/downloads/8.%20Terestricka%20navigacija%20Metode%20plovljenja%205.12.2014_final.pdf. (05.10.2017.)

[2] Casson, L.: *Seamanship in the Ancient World,* The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1995.

[3] Cravetto, E.: *Povijest 3; Helenizam i rimska republika,* Jutarnji list, 2007.

[4] Collman, R.: *What is Trigonometry?,* Live Science Contributor, 2015. URL: https://www.livescience.com/51026-what-is-trigonometry.html (07.08.2017.)

[5] Červar, B.; Erceg, G.; Lekić, I.: *Osnove geometrije,* nastavni materijal, Prirodoslovni matematički fakultet u Splitu, 2013./2014.

[6] Kos, S.; Zorović, D.: *Basic loxodromic navigational regularities,* Naše more: Znanstveno-stručni časopis za more i pomorstvo, Vol. 53 No.1-2, lipanj, 2006.

[7] Klarinčić Bakula, M.: *Uvod u matematiku,* predavanja, Prirodoslovni matematički fakultet u Splitu, 2008/09.. URL:http://mapmf.pmfst.unist.hr/~milica/Uvod_u_matematiku/Materijali_za_predavanja/UvoduMatematiku.pdf. (05.08.2017.)

[8] Klarin, M.: Terestrika, predavanja, Sveučilište u Zadru URL:http://www.unizd.hr/Portals/1/nastmat/Terestrika/Terestrika1-Klarin.PDF. (05.10.2017.)

[9] Lorentzen, S.: *History of Chronometers pt.1: Origins,* 2016. URL:http://wornandwound.com/history-of-chronometers-pt-1-origins/. (07.09.2017.)

[10] Lušić, Z, Baljak, K.: *Astronomska navigacija,* Pomorski fakultet u Splitu, Split, 2007.

[11] Lušić, Z.: *Terestrička navigacija,* skripta, Pomorski fakultet u Splitu, Split, 2006

[12] Marnika, F.: *Stabilnost broda; udžbenik za treći razred pomorskih škola,* Znanje, Zagreb, 1999.

[13] Pušić, D.: *Poznavanje broda i plovidbe,* predavanja, Pomorski fakultet u Splitu URL:https://www.fsb.unizg.hr/kziha/Predavanja%20poznavanje%20broda%20i%20plovidbe%20II.pdf. (08.01.2018.)

[14] Simović, I.A.: *Terestrička navigacija: udžbenik za usmjereno obrazovanje u pomorskom prometu i priručnik za pomorce*, 3. izd., Školska knjiga, Zagreb 1967

[15] Stanivuk, T.; Galić, S.; Bojanić, M.: *Mathematics as a Science and Marine Activity Follow Each Other Throughout Histor,* CROSBI, 2007.
URL: http://bib.irb.hr/prikazi-rad?&rad=871376. (14.12.2017.)

[16] Vitas, Z.: *Što je geometrija,* Večernji list, 2014.
URL: https://www.vecernji.hr/vijesti/sto-je-geometrija-965702. (10.08.2017.)

[17] URL:http://ageofex.marinersmuseum.org/index.php?type=navigationtool&id=7. (20.08.2017.)

[18] URL: https://www.britannica.com/biography/Regiomontanus. (09.08.2017.)

[19] URL: https://byjus.com/maths/trigonometry/. (09.08.2017.)

[20] URL: https://element.hr/artikli/file/1081. (09.08.2017.)

[21] URL: http://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?id=21705. (15.11.2017.)

[22] URL: http://www.esauboeck.com/index/Bowditch.html. (11.11.2017.)

[23] URL: http://www.famous-mathematicians.com/pythagoras. (09.08.2017.)

[24] URL: http://www.famous-mathematicians.com/thales. (09.08.2017.)

[25] URL: https://www.fsb.unizg.hr/geometrija.broda/100/110/gb114.htm. (12.08.2017.)

[26] URL:http://www.islamicspain.tv/Arts-and-Science/The-Culture-of-Al-Andalus/Navigation.htm. (28.10.2017.)

[27] URL: https://kliper.hr/zanimljivosti/povijest-pomorske-navigacije. (26.09.2017.)

[28] URL: https://www.newton.ac.uk/about/isaac-newton/life. (09.08.2017.)

[29] URL:https://sites.google.com/site/8bpitagorinpoucak/pitagorin-poucak, (09.08.2017.)

[30] URL: http://www.sites.hps.cam.ac.uk/starry/regiomontanus.html. (11.08.2017.)

[31] URL: https://www.slideshare.net/gautamanurag/history-of-navigation-8152806

[32] URL: http://www.storyofmathematics.com/hellenistic_euclid.html. (13.08.2017.)

[33] URL:http://study.com/academy/lesson/development-of-geometry-in-different-cultures.html. (12.08.2017.)

[34] URL: http://www.unizd.hr/Portals/1/nastmat/pomgeograf/Razvoj%20pomorstva.pdf. (13.11.2017.)

[35] URL:http://www.unizd.hr/portals/1/nastmat/terestrika/ae_terestrika5.pdf. (07.12.2017.)

POPIS SLIKA

POPIS SLIKA

POPIS KRATICA

GPS (engl. *Global Positioning System*)	Globalni sustav za pozicioniranje
ARPA (engl. *Automatic Radar Plotting Aids*)	Automatsko plotiranje
CPA (engl. *Closest Point of Approach*)	Najbliža točka mimoilaženja
TCPA (engl. *Time to Closest Point of Approach*)	Vrijeme do najbliže točke mimoilaženja
HMS (engl. *His Majesty's Ship*)	Brod kraljevske mornarice
LORAN (engl. *Long Range Navigation*)	Hiperbolni navigacijski sustav
DECCA (engl. *Decca Navigation Sytem*)	Decca navigacijski sustav
TPC (engl. *Tons Per Centimeter Immersion*)	Tona po centimetru
LPP (engl. *Lenght between perpendiculars*)	Udaljenost između okomica
LCG (engl. *Longitudinal Centre of Gravity*)	Uzdužni centar gravitacije
LCB (engl. *Longitudinal Centre of Buoyance*)	Uzdužni centar uzgona
LCF (engl. *Longitudinal Centre of Flotation*)	Uzdužni centar plutanja