

Trenje

Ramić, Emil

Undergraduate thesis / Završni rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Split, Faculty of Maritime Studies / Sveučilište u Splitu, Pomorski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:164:116966>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-14**

Repository / Repozitorij:

[Repository - Faculty of Maritime Studies - Split -
Repository - Faculty of Maritime Studies Split for
permanent storage and preservation of digital
resources of the institution](#)



UNIVERSITY OF SPLIT



SVEUČILIŠTE U SPLITU
POMORSKI FAKULTET U SPLITU

EMIL RAMIĆ

TRENJE

ZAVRŠNI RAD

SPLIT, 2020.

SVEUČILIŠTE U SPLITU
POMORSKI FAKULTET U SPLITU

**STUDIJ: POMORSKE ELEKTROTEHNIČKE I INFORMATIČKE
TEHNOLOGIJE**

TRENJE

ZAVRŠNI RAD

MENTOR:
dr. sc. Tina Perić

STUDENT:
Emil Ramić
(MB:0177048129)

SPLIT, 2020.

SAŽETAK

Cilj rada je analizirati trenje u njegovim specifičnim situacijama, odrediti što je to točno trenje i zbog čega nastaje. Trenje kao sila koja djeluje između dva tijela koja su u dodiru ima značajan utjecaj na svijet i potrebno je dobro poznavanje zakonitosti trenja ukoliko želimo postići maksimalnu efikasnost u radu današnjih strojeva. U svojim začetcima na molekularnoj razini u zanemarivim iznosima sila trenja na makro razini je omogućila oblikovanje svijeta na način kako on danas izgleda. Razlikujemo statičko trenje i dinamičko trenje te graničnu vrijednost kao maksimalni iznos statičkog trenja. Od značaja su nam situacije u kojima se pojavljuje trenje klizanja koje se opire smicanju dvaju tijela koja su u dodiru, trenje kotrljanja cilindričnog tijela koje je razmjerno opiranju tijela i deformacija podloge, trenje na klinastoj podlozi i trenja fluida

Ključne riječi: *trenje, statičko trenje, dinamičko trenje, Van der Waals*

ABSTRACT

The goal of this study is to analyse friction in the situations it usually manifests itself, explain what exactly friction is, and why does it occur. Friction as a force that appears between two bodies in physical contact has a significant influence on today's world and sufficient knowledge on the laws of friction is needed if we want to achieve maximum efficiency in mechanical engineering. In its inception on the molecular level, the forces of friction measuring at negligible amounts on the macro level has enabled the shaping of the world as we know it. Friction is split into static friction and kinetic friction, including the limiting friction as the maximum force of static friction. Significant situations in which friction occurs is the sliding friction which defies two objects moving against each other, rolling friction of a cylindrical object which is proportional to the resistance of a cylindrical object and the deformation of the substrate, angle of friction and the fluid friction.

Keywords: *friction, static friction, kinetic friction, Van der Waals*

SADRŽAJ

1. UVOD	1
2. POVIJEST TRENJA	3
3. VAN DER WAALSOVE SILE PRI TRENJU.....	4
3.1 OPCENITO O VAN DER WAALSOVIM SILAMA	5
3.2 PODJELA VAN DER WAALSOVIH SILA.....	6
2.2 LONDONSKE DISPERZIJSKE SILE	7
4. UTJECAJ PODLOGE NA SILU TRENJA.....	9
5. TRENJE KLIZANJA	11
5.1 PREVRTANJE TIJELA.....	14
5.2 STOŽAC TRENJA	15
5.3 TRENJE NA KOSINI.....	16
6. TRENJE KOTRLJANJA	18
7. TRENJE FLUIDA.....	20
6.1 OTPOR TEKUĆINA.....	21
6.2 OTPOR ZRAKA (AERODINAMIČKI OTPOR)	24
8. PRIMJENA TRENJA	26
9. ZAKLJUČAK	27
LITERATURA	28
POPIS SLIKA	30
POPIS TABLICA.....	31
POPIS KRATICA	32

1. UVOD

Trenje je otpor gibanju jednog tijela naspram drugog. Može se smatrati pretvorbom energije iz kinetičke u toplinsku na dodirnim površinama tijela u dodiru zbog djelovanja tangencijalne sile trenja. Naizgled glatki predmeti na mikroskopskoj razini imaju hrapavu površinu koje prilikom primjene vanjske sile reagiraju sa hrapavom površinom podloge te se razvija sila trenja.



Slika 1. Gruba površina brusnog papira

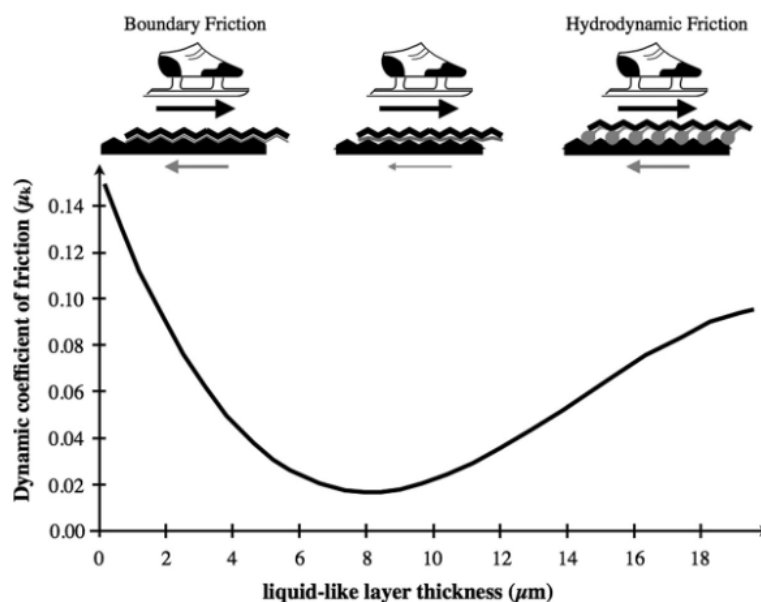
Ne može se sila trenja pripisati isključivo hrapavosti površine između tijela i površine. Potrebno je uzeti u obzir i elastičnost, to jest plastičnost podloge jer sila trenja ovisi i o deformaciji površine po kojoj se tijelo giba. Također veliku ulogu ima i kemijski sastav dvaju tijela te međusobne reakcije njihovih molekula. Istaknuto je u [13] da se dvije ulaštene staklene ploče jako opiru međusobnom smicanju iako nisu hrapave kao naprimjer dvije drvene ploče. Posljednji od znanih utjecaja na snagu trenja je onečišćenost dodirne površine tijela i podloge. Nakupine različitih površinskih naslaga može povećati ili smanjiti iznos trenja ovisno o njihovom sastavu. Sila trenja djeluje u smjeru suprotnom od smjera u kojem se tijelo giba ili njegovom nastojanju da se giba.

Posljedice sila trenja mogu uzrokovati oštećenja dodirne plohe materijala uslijed mehaničkog dodirivanja ili termalnog zagrijavanja predmeta što u tehničkoj praksi uzrokuje zamor materijala i dijelova. Sile trenja su nam u praksi najčešće korisne kako bi postigli ubrzanje nekog objekta i kako bi usporili gibanje nekog objekta. Bez sila trenja mi ne bi bili u stanju hodati, a automobili ne bi mogli zakočiti.

U tehničke svrhe bitno je razlikovati :

- Suho trenje
- Mješovito trenje
- Tekuće trenje

Suho trenje se odvija između dvije površine u krutom stanju koje na sebi nemaju nikakvih tekućina. Mješovito trenje se događa u slučaju da su plohe koje se dodiruju mokre, a tekuće trenje se događa kada su plohe sasvim razdvojene tekućom površinom. Tekuće trenje se najčešće koristi za podmazivanje ležajeva u svrhu smanjenja koeficijenta trenja i sprječavanja habanja dijelova. Po [8][21] Slijedeća slika prikazuje primjer hidrodinamičkog koeficijenta trenja pri klizanju na ledu u ovisnosti sa debljinom sloja tekućine.



Slika 2. Hidrodinamičko trenje klizaljke [8].

2. POVIJEST TRENJA

Čovjek i trenje su davni prijatelji. Ljudi nisu oduvijek znali objasniti trenje i zašto ono nastaje, ali su vrlo dobro znali koristiti njegove posljedice. Jedan od prvih instinkta ljudskog bića na sniženu temperaturu okoliša je trljanje ruku jednu o drugu, gdje se pretvorbom trenja u termičku energiju zagrijava površinski sloj kože. Dva najveća otkrića u povijesti čovječanstva, otkriće vatre i otkriće kotača, su usko vezana uz pojavu trenja. Pred otkriće vatre ljudi su bili izloženi vanjskim temperaturama bez mogućnosti utjecaja na njih, posjedovali su samo mogućnost povećanja tjelesne temperature, ali ne i temperature okoliša. Otkrivši da trljanje štapova proizvodi toplinu uslijed trenja, koja može dostići dovoljne temperature da uzrokuje paljenje suhih biljaka, čovjek je stupio u novo doba. Također, ljudska fiziologija tog doba nije omogućavala veliki kapacitet nosivosti, tako da je prijenos bilo kakvog oblika materijala bio dug i bolan proces. Ljudi su otkrićima, prvo trupcima, koji koristeći trenje kotrljanja koje je uvelike manje od trenja klizanja, pa zatim i otkrićem kotača koji koristi isti princip ali se nalazi na osovini, znatno poboljšali svoje mogućnosti u pogledu transporta dobara i naposljetku, ljudi. Velike građevine prošlosti danas ne bi stajale pred ispitom vremena da nije bilo ljudskih inovacija u području graditeljstva. Koristeći koloture i trenje užeta preko zaobljene površine ljudi su kroz povijest uzdizali monumentalne dvorce i divovske spomenike. Danas, s puno boljim razumijevanjem pojave trenja, na nama je da dođemo do novih ideja kako iskoristiti sile trenja u našu korist.



Slika 3. Paljenje vatre s pomoću sile trenja.

3. VAN DER WAALSOVE SILE PRI TRENJU

Jedan od bitnih elemenata koji se mora uzeti u obzir kod nastajanja trenja su Van der Waalsove sile između molekula. Ovisno o kemijskom sastavu tijela koje se giba po podlozi njegove molekule (bile one polarizirane ili nepolarizirane) reagiraju sa molekulama podloge. Između molekula nastaju Van der Waalsove sile koje privlače tijela uzajamno i u nekim situacijama znatno povećavaju iznos trenja

U prirodi ima mnogo primjera primjene ovih sila, prema istraživanju [7] gekon (gekko gekko) ima u brjegovima svake noge pola milijuna dlačica nazvanih setae koje se u svojim završetcima dijele na 1000 malih lopatica. S tom velikom površinom gekon se koristi kako bi maksimizirao djelovanje Van der Waalsovih sila svoje noge s kontaktnom površinom i omogućio dovoljno trenje da se kreće vodoravno.

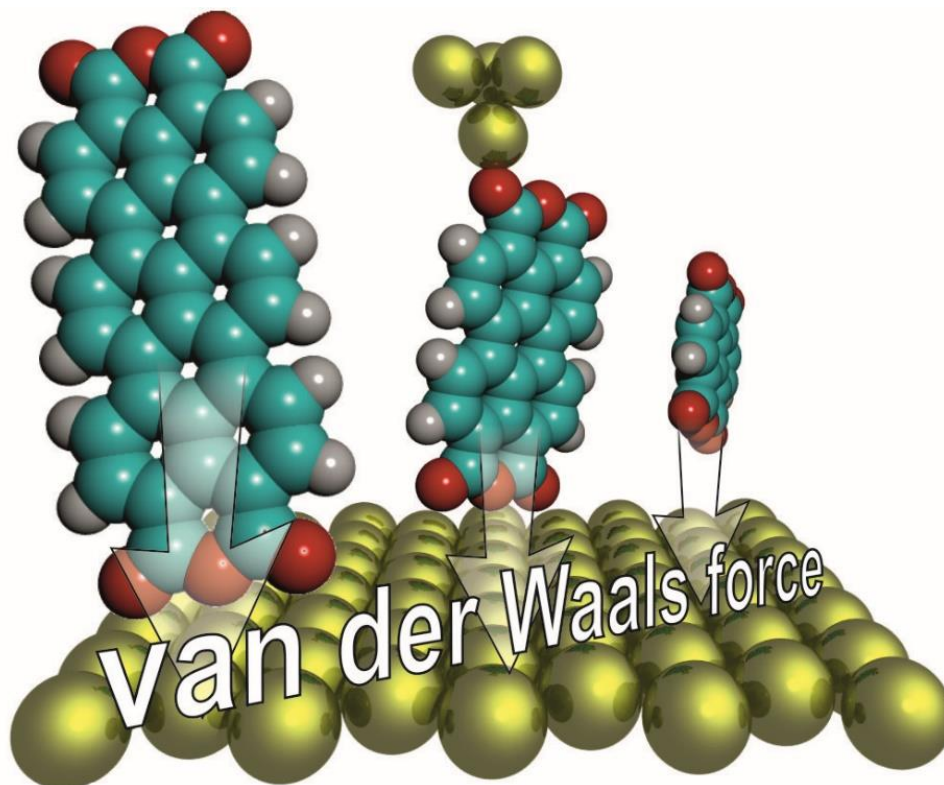


Slika 4. Stopalo gekona.

3.1 OPCENITO O VAN DER WAALSOVIM SILAMA

Van der Waalsove privlačne sile su slabije od kovalentnih veza a nastaju zbog toga što se električni plaševi dipola privlače međusobno, a sila privlačenja ovisi o dipolnome momentu i o veličini molekule. Prema [23] što je molekula veća ,to su Van der Waalsove sile unutar nje jače. Veliki utjecaj na jakost Van der Waalsovih sila između dvaju molekula ima udaljenost između dvaju molekula koje se privlače (3.1). Povećanjem udaljenosti r između dva dipola sile značajno slabe, sukladno tome sile dolaze do izražaja na manjim udaljenostima.

$$F_{\text{dipol-dipol}} = \frac{k \cdot \mu_1 \cdot \mu_2}{r^4} \quad (3.1)$$



Slika 5. Primjer privlačenja podloge i molekula zbog VDW (van der Waals) sila [15].

3.2 PODJELA VAN DER WAALSOVIH SILA

U današnje vrijeme još postoji nedoumica koje sve točno sile spadaju u skup Van der Waalsovih sila ali po [17] uobičajena je podjela na:

- Londonske sile (LDF),
- keesomove sile
- debyeve sile.

Veza između trajnih višepolnih molekula i dipola, iona ili kvadropola i trajnih višepola zbog elektrostatskog privlačenja se naziva Keesomova interakcija po znanstveniku Willemu Hendriku Keesomu a nastaju zbog privlačenja između trajnih dipola [1]

Keesomove sile se sastoje od privlačnih interakcija između trajnih polarnih molekula koje se inače slobodno rotiraju u prostoru ali pod međusobnim utjecajem se zaustave u svojoj rotaciji pod utjecajem te sile. One se ne događaju u vodenastim otopinama koje sadrže elektrolite.

Jednadžba interakcije pod prosječnim kutom:

$$\frac{-m_1^2 \cdot m_2^2}{24 \cdot \pi^2 \cdot \epsilon^2 \cdot \epsilon_r^2 \cdot k_B \cdot T \cdot r^6} = V \quad (3.2)$$

Gdje je: m = dipolni moment molekule, ϵ_0 = vodljivost slobodnog prostora, ϵ_r = dielektrična konstanta okolnog materijala, T = temperatura, K_b = Boltzmannova konstanta i r = udaljenost među molekulama

Debyeve sile se definiraju kao sile između trajnih dipola i induciranih dipola, koje nastaju zbog polariziranih rotirajućih dipolnih molekula i molekula koje imaju sposobnost polarizacije. Molekula dipola odbija elektrone neutralne molekule i time ju polarizira. Debyeve sile se ne manifestira između atoma. Inducirana molekula se slobodno kreće oko dipola a sila nije jako ovisna o temperaturnim promjenama [2]. Ova interakcija se može očekivati kod bilo koje kombinacije polarne i nesimetrične/ nepolarne molekule

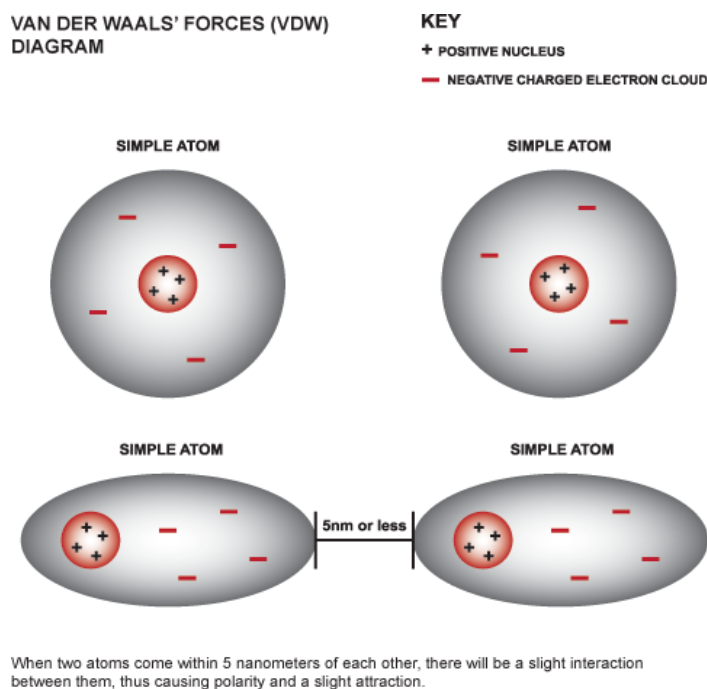
Jednadžba interakcije pod prosječnim kutom:

$$\frac{-m_1^2 \cdot \alpha_2}{16 \cdot \pi^2 \cdot \epsilon_0^2 \cdot \epsilon_r^2 \cdot r^6} = V \quad (3.3)$$

Gdje je: α = polarizacija

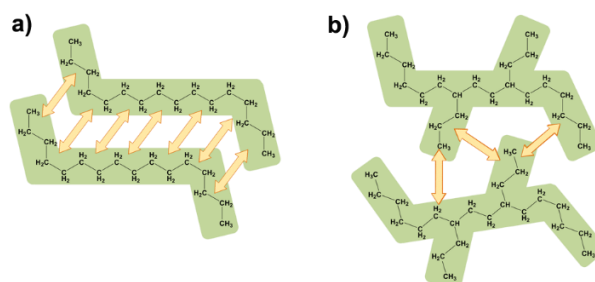
2.2 LONDONSKE DISPERZIJSKE SILE

Čestice osciliraju oko svoga ravnotežnog položaja prema kvantnoj teoriji a jezgra oscilira s obzirom na svoj elektronski oblak. U slijed tih oscilacija dogodi se da dolazi do trenutačne nesimetrične raspodjele pozitivnog i negativnog naboja i tako nastaje kratkotrajni promjenjivi dipol [5].



Slika 6. Primjer induciranja kratkotrajnog dipola

Sa veličinom molekule raste i jačina veze, a sukladno tome i dipolni moment. Na snagu veze također i utječe oblik molekule, specifično veličina površine koja može reagirati sa susjednim molekulama. Što je veća površina postoji više mogućih centara za stvaranje veze. Specifičnost Londonskih sila je što nastaju između svih vrsta molekula [6].



Slika 7. Utjecaj oblika molekule na snagu sile

Polarizabilnost je vjerojatnost molekula da se u njoj razdvoje naboji. Snaga induciranog dipolnog momenta μ je direktno proporcionalna snazi električnog polja, E sa proporcionalnom konstantom α koja se naziva polarizabilnost. Električno polje uzrokuje distorzije u molekuli stoga što je jače polje, jača je i distorzija :

$$\mu = \alpha \cdot E \quad (3.4)$$

Gdje je: $-\mu$ = inducirani dipolni moment

$-\alpha$ = polarizabilnost

$-E$ = snaga električnog polja.

Prema [16] Interakcijska energija se može procijeniti koristeći Londonovu formulu. Prema Fritz Londonu je dokazano da potencijalna energija dvaju nenabijenih molekula ili jednakih atoma se može mjeriti slijedećom formulom:

$$V_{11} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{\alpha_2 \cdot I}{r^6} \quad (3.5)$$

Primijenjeni oblik jednadžbe za nejednake atome i molekule

$$V_{11} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{I_1 + I_2} \cdot \frac{\alpha_1' \cdot \alpha_2'}{r^6} \quad (3.6)$$

Gdje je: $-I$ prva ionizacijska energija svake molekule

- α je polarizabilnost

- r je udaljenost između molekula

4. UTJECAJ PODLOGE NA SILU TRENJA

Snaga sile trenja je ovisna o površinskim karakteristikama materijala koji dolaze u dodir. Svi omjeri koeficijenata su dobiveni eksperimentalno. Ono što se mjeri je kako sila pritiska na podlogu utječe na silu trenja, te dvije sile su poprilično proporcionalne i može se koristiti konstanta μ . [13]

Te sile su u omjeru

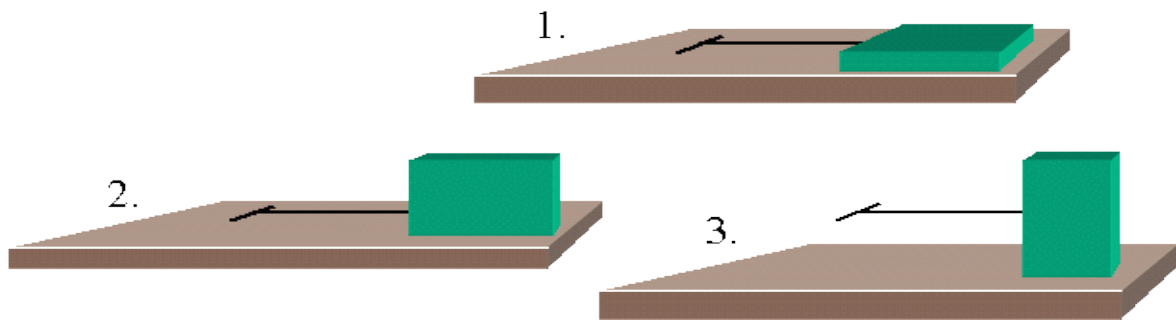
$$F_T = \mu \cdot F_N \quad (4.1)$$

Sila pritiska na podlogu je okomita na podlogu a sila trenja je paralelna sa podlogom a međusobno su sile uvijek okomite.

Tablica 1. Primjer različitih koeficijenata trenja među materijalima

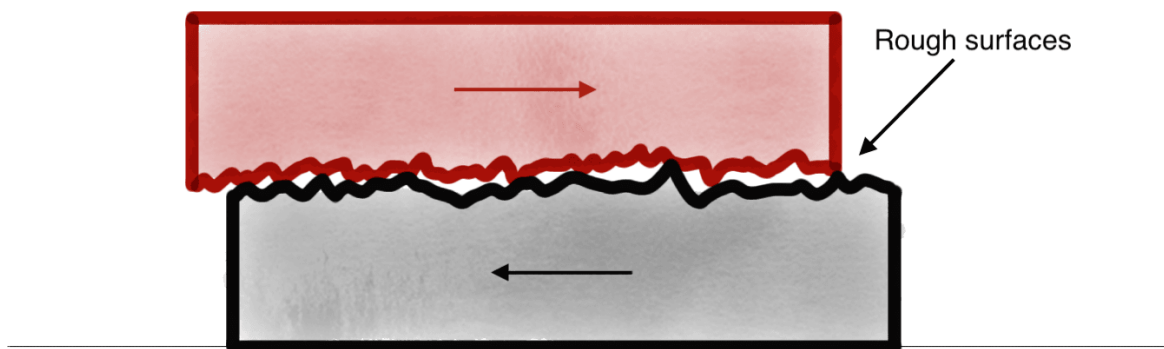
Materijal	μ_0
Metal po metalu	0,15 – 0,25
Metal po drvetu	0.20-0,50
Drvo po drvetu	0,35-0,70
Čelik po ledu	0,014
Drvo po ledu	0,035

Kao što je konstatirano u [11] iznos sile trenja je uglavnom neovisna o veličini dodirne površine. U slučaju da imamo dva objekta iste mase, gdje je objekt 2 dvaput duži od objekta 1, neće doći do povećanog iznosa trenja. Objekt 2 zbog povećane dužine djeluje po cm^3 duplo manjom silom od manjeg objekta. Ova izjava nije istinita pri malim površinama kada se događa plastična deformacija podloge zbog velikih sila pritiska.



Slika 8. Eksperimentalno dokazivanje da sila trenja ne ovisi o veličini dodirne površine [5]

Interakcije grubih površina rezultiraju većom silom trenja jer na mikroskopskoj razini površine nepravilnosti se međusobno zakače i potrebna je veća sila da bi se neravnine oslobodile iz zaglavljene pozicije. Veliki utjecaj na koeficijent trenja između dvaju površina ima vrsta i stanje površine. Finije obrađena površina istog materijala će imati manje trenje od grubo obrađene površine.



Slika 9. Primjer zaglavljivanja grubih površina

5. TRENJE KLIZANJA

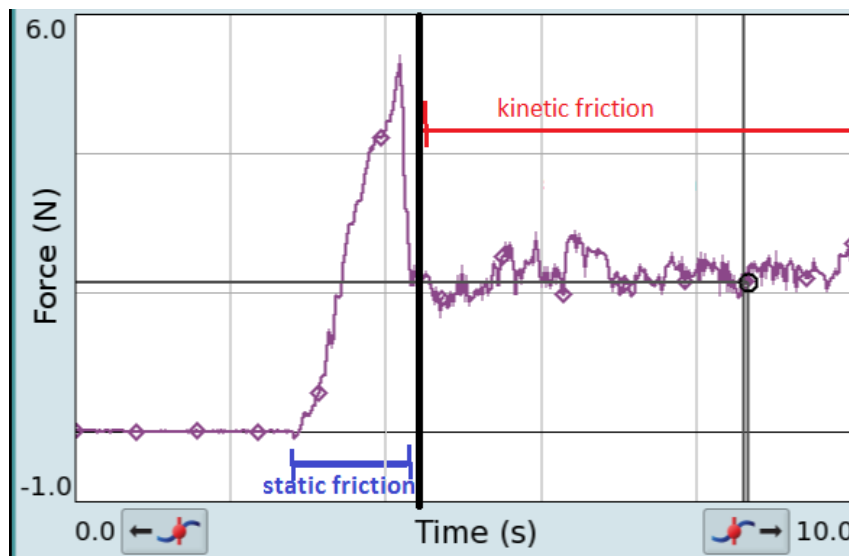
Trenje klizanja nastaje kada sila koja djeluje na tijelo je dovoljno jaka da svlada otpor podloge. Kod suhog trenja, brzina kojom se objekt giba po podlozi nema utjecaja na silu trenja. Prema tome sila trenja ovisi o :

$$T_k = \mu_k \cdot F \quad (5.1)$$

Gdje je: -T = sila kinetičkog trenja

- μ_k = koeficijent tehničkog trenja.

Važno je napomenuti da primjenjujući silu na tijelo, kratko prije početka gibanja tijela na njega djeluje maksimalni iznos sile statičkog trenja. U trenutku kada tijelo uspostavi gibanje po podlozi sila F_{max} koja je potrebna da se gibanje uspostavi je veća od sile klizanja T_k . Također u većini slučajeva je koeficijent dinamičkog trenja manji od koeficijenta statičkog trenja, $\mu_k < \mu_s$. Ta pojava se događa jer se neravnine između objekta i podloge ne stignu potpuno uglaviti.



Slika 10. Odnos sile i trenja kroz vrijeme

Nakon rasta sile do granice statičkog trenja, prelaskom u kinetičko trenje, sila trenja je većinom konstanta bez obzira na aktivnu silu \vec{F} koja djeluje na tijelo

Na eksperimentalnoj osnovi određeni su faktori koji utječu na silu trenja a to su: hrapavost dodirnih površina, vrsta materijala, normalni pritisak između dodirnih ploha, vlažnost ploha, temperatura materijala i brzina relativnog gibanja. Kod vlažnosti ploha se uzima u obzir stvaranje tankog sloja gdje suho trenje prelazi u tekuće zbog podmazivanja.

Otpor podloge N jednak je težini tijela G ali te sile ne leže na istom pravcu. Između njih postoji otklon x koji se povećava s povećanjem sile F . Ukoliko primjenjujemo silu F sa lijeve strane tijela, zbog otklona x će se s desne strane središnjice tijela nalaziti veća specifična težina tijela.

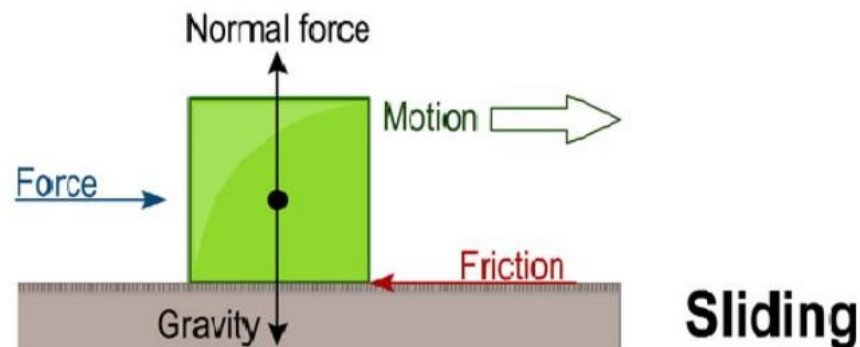
$$N \cdot x - T \cdot h = 0, \quad x = \frac{T \cdot h}{G} \quad (5.2)$$

Gdje je: $-N$ = otpor podloge

$-T$ = sila trenja

$-G$ = težina tijela

$-x$ = otklon



Slika 11: Sile koje djeluju na tijelo prilikom klizanja

Prema [18] Prikazom rezultante \vec{R} normalne sile pritiska površine i sile trenja za $v=0$ dobiva se:

$$\vec{R}_S = \vec{N} + \vec{T}_{max} \quad (5.3)$$

Intezitet vektora rezultante iznosi:

$$R_s = \sqrt{N^2 + T_{max}^2} \quad (5.4)$$

Po analogiji se dobiva i za slučaj gibanja $v \neq 0$:

$$\vec{R}_k = \vec{N} + \vec{T}_k \quad (5.5)$$

Odnosno:

$$R_k = \sqrt{N^2 + T_{max}^2} \quad (5.6)$$

Kut trenja ρ , se uzimao kao odklon između rezultante \vec{R} i normalnog pritiska \vec{N} :

Budući da je:

$$\tan \rho_s = \frac{T_{max}}{N} \quad (5.7)$$

Slijedi za slučaj $v=0$:

$$\tan \rho_s = \frac{\mu_s \cdot N}{N} = \mu_s \quad (5.8)$$

$$\mu_s = \tan \rho_s, \quad \rho_s = \tan^{-1} \mu_s \quad (5.9)$$

Također i za slučaj $v \neq 0$:

$$\mu_k = \tan \rho_k, \quad \rho_k = \tan^{-1} \mu_k \quad (5.10)$$

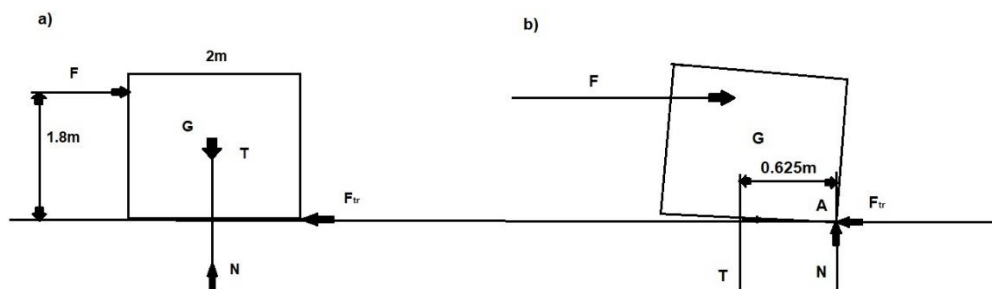
Možemo zaključiti da je kut statičkog trenja je ρ_s , a kut dinamičkog trenja ρ_k pri čemu je $\rho_s > \rho_k$.

5.1 PREVRTANJE TIJELA

Promatrajući interakcije između tijela i podloge, moramo uključiti i mogućnost prevrtanja tijela. Tijelo u slučaju zadovoljavanja određenih uvjeta neće kliziti već će se prevrnuti oko svoje osi. Tijekom klizanja tijelo većinom svoje površine dodiruje podlogu, u slučaju stvaranja momenta oko kuta tijela dolazi do prevrtanja gdje se tijelo nagnje i u dodiru je sa podlogom samo u jednoj točki ili crti. Slijedeći primjer po uzoru na [10] prikazuje situaciju kada je potrebno znati hoće li predmet prvo proklizati ili prevrnuti se:

Za primjer ćemo uzeti drveni blok težine 50 kg i visine 2 m, Primjenjujući silu koja se postupno povećava na visini od 1,8 m potrebno je odrediti hoće li se kutija prvo prevrnuti ili proklizati s obzirom na koeficijent klizanja 0,5.

Sile koje djeluju na blok su težina T , normalna sila N i sila F .



Slika 12. Skica drvenog bloka

Da bi tijelo klizalo prema sl.10 a) ,treba zadovoljiti uvjet $F > F_{tr}$.

Najmanja sila F koju treba primijeniti da bi tijelo klizalo ćemo dobiti jednadžbom trenja:

$$F = \mu \cdot T, \quad F = 0.5 \cdot 50 \cdot 9.8 = 245\text{N} \quad (5.11)$$

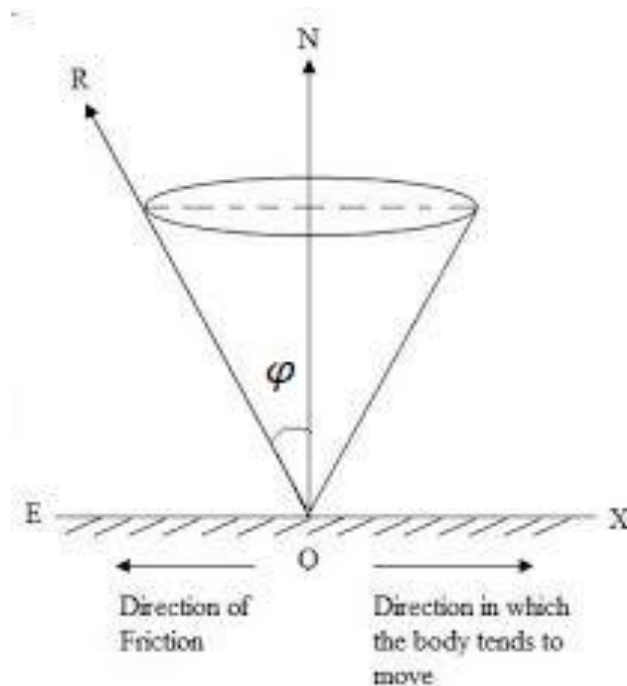
U trenutku kada je tijelo pri prevrtanju otpor podloge je u točki A, stvarajući moment sl.10 b):

$$F \cdot 1.8 = T \cdot 0.625, \quad F = \frac{50 \cdot 9.8 \cdot 0.625}{1.8} = 170.14\text{N} \quad (5.12)$$

Iz rezultata je vidljivo da će se drveni blok prvo krenuti prevrtati kada sila dosegne 170.14N.

5.2 STOŽAC TRENJA

Stožac trenja je vrlo bitan ukoliko je koeficijent trenja tijela jednak u svim smjerovima, to jest ukoliko je smjer klizanja tijela neovisan o jačini sile trenja. Po [22] stožac trenja se dobije tako da se sila F koja djeluje na tijelo i nastoji ga pomaknuti rotira za 360° , dobivena rezultanta R će opisati plašt stošca. Također može se dobiti ako se kut trenja φ prenese u svim pravcima na duljinu od 2φ .



Slika 13. Primjer kuta i stošca trenja

U slučaju da na tijelo koje se nalazi na podlozi djeluje neka sila F pod kutom α s obzirom na normalnu na površini podloge, ta sila mora zadovoljiti uvjet da bi se tijelo kretalo:

$$F \cdot \sin \alpha > F_t \quad (5.13)$$

$$F \cdot \sin \alpha > \mu \cdot N \quad (5.14)$$

$$F \cdot \sin \alpha > \mu \cdot F \cdot \cos \alpha \quad (5.15)$$

$$\tan \alpha > \cos \varphi \quad (5.16)$$

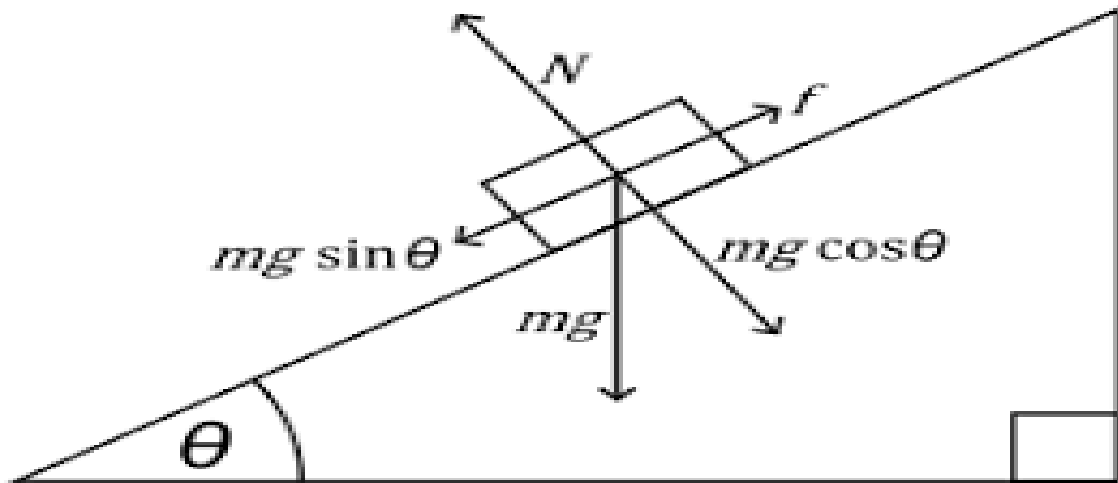
$$\alpha > \varphi \quad (5.17)$$

Tijelo će ostati u stanju mirovanja u slučaju da se aktivna sila nalazi unutar stošca trenja.

5.3 TRENJE NA KOSINI

U situaciji kada imamo tijelo koje leži na hrapavoj kosini bitno nam je odrediti dvije situacije. Gibanje tijela niz kosinu i gibanje tijela uz kosinu. U ove dvije situacije sila statičkog trenja djeluje u smjeru obrnutom od težnje gibanja i dostiže svoju maksimalnu vrijednost.

Kada se tijelo nalazi na kosini treba odrediti najmanji iznos sile F koja je potrebna da spriječi tijelo da klizi niz kosinu, ili kut α koji je potreban da tijelo krene klizati niz kosinu.



Slika 14. Sile koje djeluju na tijelo na kosini

Ako je tijelo oslobođeno veza na njega djeluju sile G i F i reaktivne sile N i T . Smjer sile T je uz kosinu. Treba uočiti da normalna sila djeluje okomito na podlogu na kojoj se nalazi. Sila gravitacije mg je rastavljena na okomitu i paralelnu komponentu s obzirom na kosinu.[12] Sa slike 14 je lako uočljivo da komponenta okomita na kosinu se suprotstavlja normalnoj sili, a paralelnoj komponenti sila trenja.

U slučaju odsutnosti trenja tijelo bi ubrzavalo niz kosinu pod silom

$$a = g \cdot \sin \theta \quad (5.17)$$

To jest, ukupni zbroj sila koje djeluju na tijelo podijeljen sa masom tijela.

$$a = \frac{F_{net}}{m} \quad (5.18)$$

Za slučaj na slici 11, uzevši u obzir silu trenja postavljeni su uvjeti ravnoteže po [14]:

$$\sum x_i = 0, \quad T - G \cdot \sin \alpha + F_1 = 0 \quad (5.19)$$

$$\sum y_i = 0, \quad N - G \cdot \cos \alpha = 0 \quad (5.20)$$

Uvjet
trenja: $T = \mu \cdot N \quad (5.21)$

Koristeći ove jednadžbe dobijemo:

$$F_1 = G(\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha) \quad (5.22)$$

U slučaju da je $F=0$, onda je na osnovi gornjeg izraza:

$$\tan \alpha = \mu = \tan \varphi \quad (5.23)$$

U ovisnosti između kutova α i φ razlikujemo tri specifične situacije važne za tehničku mehaniku

Tijelo u
graničnoj
ravnoteži: $\alpha = \varphi \quad (5.24)$

Tijelo miruje
na kosini: $\alpha < \varphi \quad (5.25)$

Tijelo klizi na
kosini: $\alpha > \varphi \quad (5.26)$

Za slučaj da se tijelo nastoji gibati uz kosinu, onda sila trenja djeluje u suprotnome smjeru i ima negativni predznak.

Postavljajući uvjete ravnoteže:

$$\sum x_i = 0, \quad -T - G \cdot \sin \alpha + F_2 = 0 \quad (5.27)$$

$$\sum y_i = 0, \quad N - G \cdot \cos \alpha = 0 \quad (5.28)$$

$$T = \mu \cdot N \quad (5.29)$$

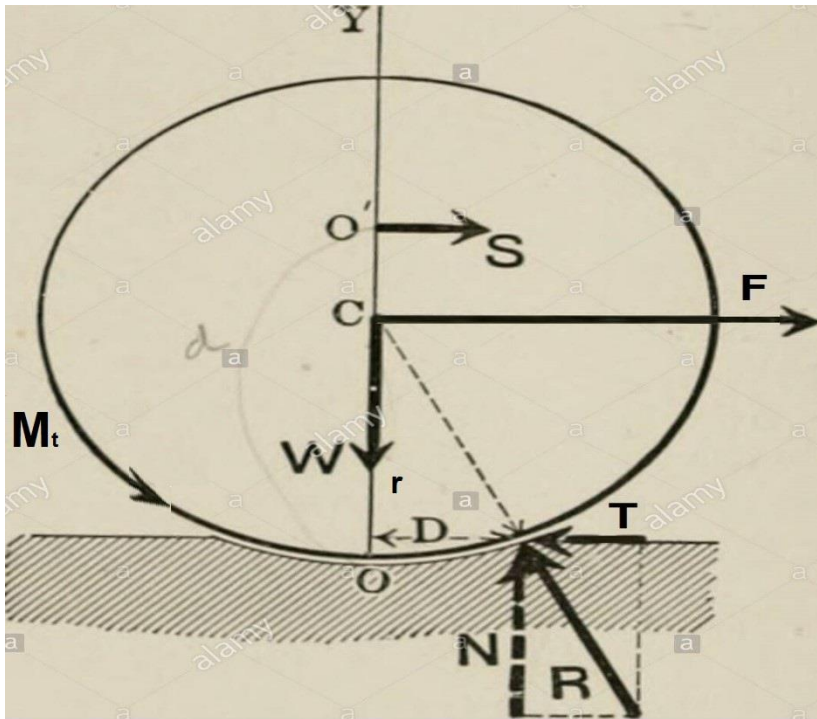
Dobiva se:

$$F_2 = G(\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha) \quad (5.30)$$

Sila F_2 je najveći iznos sile koji je potreban da se tijelo krene gibati uz kosinu

6. TRENJE KOTRLJANJA

Kretanje cilindričnog tijela na podlozi, uz pretpostavku da ne dolazi do klizanja, rezultira pojavom trenja kotrljanja. Kod trenja klizanja površine se priljube jedna s drugom u cijelosti a kod trenja kotrljanja one su samo kratko u dodiru, zbog toga je faktor trenja kotrljanja manji od faktora trenja klizanja. Kao i kod trenja klizanja bitne su vrste materijala tijela i podloge te njihove hrapavosti. Cilindrično tijelo ima svoju masu kojom djeluje na površinu koju deformira. Zbog tih deformacija reakcija tijela se pomiče u točku B a ta udaljenost se naziva koeficijent trenja kotrljanja koji se mjeri kao dužina (m).



Slika 15. Sile koje djeluju na cilindrično tijelo prilikom kotrljanja

Uspostavimo jednadžbe ravnoteže uzimajući u obzir silu trenja podloge, silu koja djeluje:

$$\sum x_i = 0, \quad F - T = 0 \quad (6.1)$$

$$\sum y_i = 0, \quad -G + N = 0 \quad (6.2)$$

$$\sum M_a = 0, \quad -F \cdot r + M_T = 0 \quad (6.3)$$

Pri čemu su : $-R$: sila trenja pri kotrljanju

$-M_T$: moment sprega trenja kotrljanja

Važno je napomenuti da je sila trenja T uvijek manja komponenta od normalne sile N kod kotrljanja.

$$F \leq \mu \cdot N \quad (7)$$

Iz navedenog sustava jednadžbi dobijemo varijablu F koja predstavlja silu koju je potrebno primijeniti na tijelo da bi se tijelo kotrljalo:

$$F = \frac{f}{r} \cdot G \quad (6.5)$$

Najčešći slučaj je da se kotrljanje događa bez klizanja, što znači da je gornja granica statičkog trenja manja od trenja kotrljanja:

$$\frac{f}{r} < \mu \quad (6.6)$$

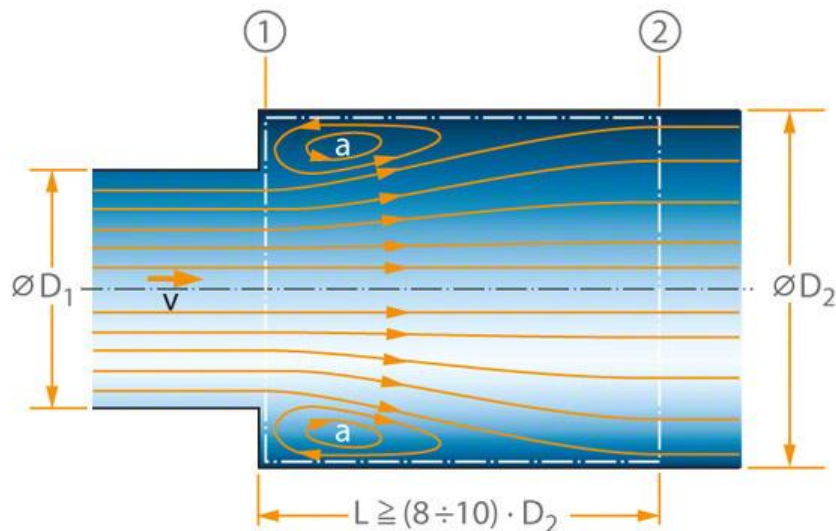
U praksi se trenje klizanja nastoji zamijeniti trenjem kotrljanja kod strojeva. Osnovni primjer za to je kuglični ležaj koji sadrži kuglice između dvije plohe koje se ne dodiruju direktno. S pomoću rotirajućih kuglica se prenosi trenje sa vanjske površine na unutarnju i omogućuje rotaciju ležaja.

7. TRENJE FLUIDA

Kao što se prilikom gibanja krutih tvari javlja sila trenja, tako se i kod gibanja koja uključuju tekućine i plinove javlja otpor. Fluidi su zajednički naziv za sve tvari tekućeg, plinovitog ili mješovitog sastava. Tekućina je tvar koja je nestlačiva, izrazito reaktantna na vanjske sile i zauzima definirani volumen. Odlikuju se pojavama slobodnih površina koje nisu predmet ni okomitog normalnog napona ni horizontalnog napona. Plinovi su izrazito stlačivi i zauzeti će sav mogući volumen prostora u kojem se nalaze. Nemaju mogućnost formiranja slobodnih površina.

Razlikujemo tri osnovne pojave otpora kod fluida:

- Protjecanje: –Kretanje fluida kroz prostor sa ili bez dodirivanja krutih stijenki okolne tvari.
- Optjecanje: -Pojava u kojoj fluid miruje a neka kruta tvar potpuno ili djelomično uronjena se giba kroz njega.
- Spoj protjecanja i optjecanja: -Gibanje fluida i gibanje objekta u njemu stvara složene situacije koje se najčešće susreću u pokretnim mehaničkim dijelovima.



Slika 16. Primjer strujanja fluida kroz cijev s promjenom promjera

7.1 OTPOR TEKUĆINA

Otpor tekućina ovisi o najviše o gustoći i viskoznosti tekućine. Viskoznost tekućine je trenje koje nastaje zbog različite brzine gibanja njenih slojeva a njen uzrok su kohezijske (prijanjajuće) sile između njenih molekula i adhezijske sile između fluida i krutog tijela kroz koje se tekućina giba. Kako tekućina struji kroz tijelo, oni slojevi koji dodiruju stijenke usporavaju zbog trenja u odnosu na slojeve koji nisu u dodiru sa stjenkama [22]. Sila F na jedinicu površine između dva sloja tekućine je razmjerna relativnoj brzini gibanja od sloja do sloja dy .

$$F = -\eta \cdot \frac{dv}{dy} \quad (6.7)$$

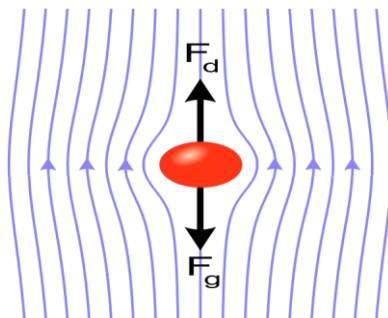
Predznak nam govori da se sila opire brzini gibanja. Koeficijent η se naziva dinamičkom viskoznosti. On je izrazito podložan temperaturi jer s povećanom temperaturom slabe međumolekulske privlačne sile. Viskoznost tekućine daje otpor čvrstom tijelu koje se giba kroz nju. Prvenstveno sila otpora ovisi o veličini i obliku tijela, te brzini kojom se tijelo giba kroz tekućinu, koeficijentu viskoznosti η i gustoći tekućine ρ . Potrebno je i razlikovati kinetičku viskoznost koja je omjer dinamičke viskoznosti η i gustoće tekućine ρ .

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right] \quad (6.8)$$

Za primjer ćemo uzeti Stokesov zakon koji nam govori da se za kuglu polumjera r koja se brzinom v giba u fluidu viskoznosti η ili se on giba oko nje, sila F_d je jednaka:

$$F_d = 6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot r \cdot v \quad (6.9)$$

Specifičnost ovog zakona je da vrijedi samo za male brzine strujanja tekućina, kod velikih brzina se događa turbulencija i sila otpora ovisi o kvadratu brzine.



Slika 17. Stokesov zakon

Prvo ćemo analizirati situaciju u kojoj se tijelo giba kroz tekućinu . Koeficijenti trenja između različitih materijala i tekućina se određuju eksperimentalno, jer ova tema još nije teorijski zaključena. Opći oblik zakona otpora je dobiven dimenzionalnom analizom u [2] i koristi se kao podloga za funkcionalni oblik eksperimentalno dobivenih podataka.

Pokusi su pokazali da otpor ovisi o pet faktora a to su :

- Gustoća tekućine ρ
- Brzina gibanja tijela v
- Dimenzija tijela l
- Viskoznost fluida η
- Otpor F

Dakle iz tih činjenica prema [2] dobivamo funkciju:

$$f(F, \rho, l, v, \eta) \quad (6.10)$$

Od ovih 5 argumenata 3 (ρ , l , v) su osnovne fizikalne veličine a 2 su izvedene. Prema π teoremu je u funkciji Φ 5-3=2 monoma:

$$\Phi(\pi_1, \pi_2) = 0 \quad (6.11)$$

Monomi se slažu od kombinacije jedne izvedene i svih ostalih veličina:

$$\pi_1 = F \cdot \rho^{x_1} \cdot l^{y_1} \cdot v^{z_1}, \quad \pi_2 = \mu \cdot \rho^{x_2} \cdot l^{y_2} \cdot v^{z_2} \quad (6.12)$$

Prvo ćemo dimenzionalno analizirati prvi monom

$$m^0 \cdot l^0 \cdot t^0 = (m \cdot l \cdot t^{-2}) \cdot (m \cdot l^3)^{x_1} \cdot l \cdot y_1 \cdot (l \cdot t^{-1})^{z_1} \quad (6.13)$$

Rješenje prvoga monoma je $x_1 = -1$, $y_1 = -2$ i $z_1 = -2$. pa je :

$$\pi_1 = \frac{F}{\rho \cdot l^2 \cdot v^2} = \frac{F}{\rho \cdot A \cdot v^2} \quad (6.14)$$

Zatim drugi monom:

$$m^0 l^0 t^0 = (l^2 t^{-1}) (m \cdot l^3)^{x_2} l \cdot y_2 (l \cdot t^{-1})^{z_2} \quad (6.15)$$

Riješenje drugog monoma je $x_2 = 0$, $y_2 = -1$, $z_2 = -1$ pa je:

$$\pi_2 = \frac{\mu}{l \cdot v} = \frac{1}{R_e} \quad (6.16)$$

Funkcija Φ ovog oblika je :

$$\Phi\left(\frac{F}{\rho \cdot A \cdot v^2}, \frac{1}{R_e}\right) = 0 \quad (6.17)$$

Iz te funkcije dobijemo izraz za silu:

$$F = \rho \cdot A \cdot v^2 \cdot f(R_e) \quad (6.18)$$

Ako se stavi da je $C(R_e) = 2f(R_e)$, dobiva se Newtonova formula za otpor tijela:

$$F = \frac{1}{2} C \rho \cdot A \cdot v^2 \quad (6.19)$$

Koeficijenti C i R_e ovise o obliku tijela i određuju se eksperimentalno.

Slijedeća situacija koju ćemo razmotriti je trenje među slojevima tekućine koja se slobodno giba. To trenje uzrokuje povećanje temperature i gubitak energije u tekućini. Eksperimenti koji su temeljeni na Newtonovom pokusu su pokazali da se viskozna sila može prikazati kao umnožak tangencijalnog trenja i tangencijalne površine.

$$F_{vis} = \tau \cdot A \quad (6.20)$$

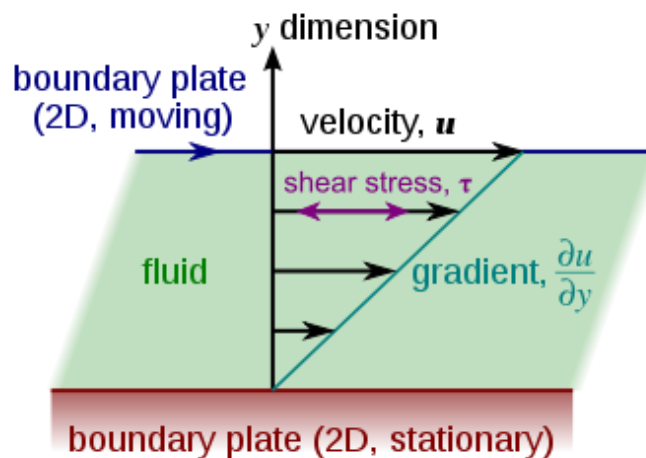
Ukoliko se razmatra čestica tekućine onda sila djeluje na njeno bočno oplošje:

$$dF_{vis} = \tau \cdot dO \cdot ds \quad (6.21)$$

Ako se rad koji ta sila učini na putu s , podijeli sa težinom čestice dobije se gubitak energetske visine zbog sile viskoznosti:

$$dh_{vis} = \frac{dF_{vis} \cdot ds}{\rho \cdot g \cdot dA \cdot ds} = \frac{dF_{vis}}{\rho \cdot g \cdot dA} \quad (6.22)$$

Viskoznost tekućine ima za posljedicu gubitak energije tekućine, i to uvijek u smjeru u kojem se tekućina kreće.

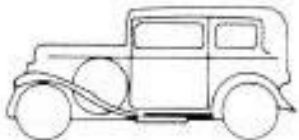
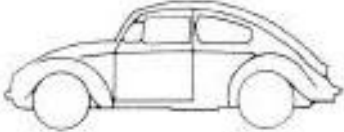
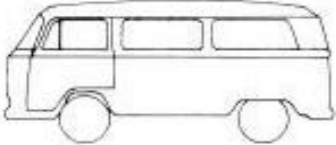
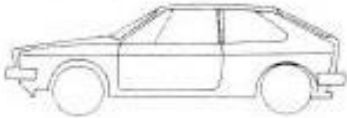


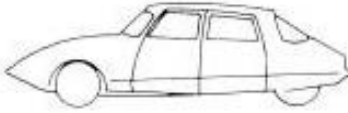


Slika 18. Tangencijalna sila sloja tekućine u 2D

7.2 OTPOR ZRAKA (AERODINAMIČKI OTPOR)

Najčešća situacija s kojom se susrećemo vezano za otpor fluida dok se tijelo giba kroz prostor je otpor zraka. Aerodinamička sila otpora djeluje suprotno od smjera kretanja nekog krutog tijela. Do njega dolazi jer tijelo u gibanju udara u molekule zraka koje ga usporavaju, najmanji mogući otpor tijelo postiže ukoliko mu je uzdužna os u smjeru strujanja zraka.

Tablica 2. Primjer koeficijenata otpora zraka za različite oblike karoserije automobila

Naziv oblika karoserije	Skica automobila	Otpor zraka Cd
Saloon		0,60
Hatchback		0,46
Van		0,40
Kammback		0,39
Fastback		0,34
Coupe		0,34
Aerodynamic sedan		0,31

Otpor trenja nekog tijela ovisi o ovim čimbenicima [1]

- Gustoća zraka kroz koje se tijelo giba
- Obliku tijela i glatkoće dodirnih površina između zraka i tijela
- Površina presjeka na najdebljem dijelu
- Brzina gibanja tijela kroz zrak

Veličina otpora tijela se izračuna po jednadžbi :

$$R=C_x \cdot S \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \quad (6.23)$$

Gdje su:

- R-cjelokupna sila aerodinamičkog otpora
- C_x-koeficijent sile otpora tijela
- S-površina najdebljeg poprečnog presjeka tijela okomito na pravac gibanja
- ρ-gustoća zraka ili fluida
- v-brzina kretanja tijela

8. PRIMJENA TRENJA

U današnje doba, u mehanici se nastoji izbjeći posljedice djelovanja trenja koje uzrokuju oštećivanje materijala zbog smicanja, zagrijavanja materijala uslijed djelovanja trenja, i otpor prilikom gibanja uslijed manjka podmazivanja. Princip trenja danas ima nezaobilaznu primjenu u životu, bilo da je riječ o sportu ili inženjerstvu. Samo koristeći automobil kao primjer može se nabrojati nekoliko desetaka načina iskoristivosti sile trenja. U motoru automobila se koristi ulje koje podmazuje i hladi dijelove motora kako bi im produžila vijek trajanja i spriječila njihovo habanje. Automobilske gume su napravljene od materijala sa velikim koeficijentom trenja kako bi automobil mogao što efikasnije prenijeti silu na pod i ubrzati, a kao prema ranije viđenoj tablici 2, sama karoserija je građena na način da otpor zraka bude što manji.

U pomorstvu vrlo je važno da je oplata broda što glađa i premazana posebnom bojom koja sprječava nastanjivanje morskih organizama. Poznajući faktore koji utječu na otpor tijela koje se kreće kroz fluid, oplata obrasla algama i drugim morskim organizmima može izazvati i do 40% smanjenje brzine i potrošnju goriva. Trenje se koristi i kod brodskih vitla, podmazivanja broskog motora, oblika sidra... Možda najuočljiviji princip smanjenja sile otpora fluida je kod hidroglisera koji se izdižu djelomično izvan mora te na taj način smanjuju površinu plovila uronjenog u more i postižu veće brzine i bolju ekonomiju goriva.



Slika 19. Korištenje malog koeficijenta trenja snijega za zabavu

9. ZAKLJUČAK

U ovom radu smo ustanovili da je trenje složena pojava koja se javlja između dvije tvari u dodiru. Reaktivna sila trenja koja se javlja uslijed te pojave uvijek djeluje suprotno od gibanja ili nastojanja gibanja tijela. Trenje je nemoguće izbjeći u svakodnevnome životu i pojavljuje se na svakom koraku, kada noga kojom koračamo dodirne podlogu i odguruje nas naprijed. Sukladno tome gledajući u budućnost imajući silu trenja na umu čovječanstvu je neizbježno da se prilagodi, koristeći silu trenja da bi ubrzavali tijela ili se pobrinuli da se ta tijela ne mogu gibati. Moguće je utjecati na jakost sile trenja podešavajući njene parametre, pravilnim odabirom materijala, podmazivanjem, finom obradom površine i održavanjem idealne temperature u mehanici je moguće ublažiti štetna djelovanja sila trenja. S napretkom tehnologije, i težnji smanjenu volumena alata i strojeva, nužno će biti i ulaganje u istraživanje trenja na molekularnim razinama. U svijetu gdje se teži prometnoj povezanošću zakoni trenja i efikasnost strojeva su usko povezani sa profitom. Oslanjajući se na silu trenja čovječanstvo je postiglo mnogo, a detaljnom analizom trenja postići će još više.

LITERATURA

- [1] *Air friction*. URL: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/airfri.html>, (pristupljeno 4.9.2020)
- [2] Andreić, Ž.: *Temelji mehanike fluida*, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2014
- [3] Breinard, J.: Types of friction, 2012. URL: <https://www.ck12.org/physics/types-of-friction/lesson/Types-of-Friction-MS-PS/>, (pristupljeno 19.8.2020)
- [4] *Brief history of friction*. URL: <https://www.phy.davidson.edu/FacHome/dmb/PY430/Friction/history.html>, (pristupljeno 1.9.2020)
- [5] Brinic, S.: Predavanja *Međumolekulske sile*
- [6] Brinic, S.: Predavanja *Rezonancija ili Mezomerija*
- [7] *Evidence for van der Waals adhesion in gecko setae*, 2002. URL: <https://www.nature.com/articles/news020826-2>, (pristupljeno 20.8.2020)
- [8] Formenti, F.: *A review of the physics of Ice Surface Friction and the Development of Ice Skating*, 2014
- [9] Gang Shang, Chen; Xiandong, Liu.: *Friction dynamics*, 2016
- [10] Hannah, J; Hiller, M, J.: *Applied Mechanics third edition*, Longman
- [11] *How surface area affects friction*, URL: <https://www.dummies.com/education/science/physics/how-surface-area-affects-the-force-of-friction/>, (pristupljeno 29.8.2020)
- [12] *Inclined planes*, URL: <https://www.physicsclassroom.com/class/vectors/Lesson-3/Inclined-Planes>, (pristupljeno 2.9.2020)
- [13] Khan academy: *What is friction?* URL: <https://www.khanacademy.org/science/physics/forces-newtons-laws/inclined-planes-friction/a/what-is-friction>, (pristupljeno 15.8.2020)
- [14] Kulenović, Zlatan.: *Tehnička mehanika I*, Pomorski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split, 2013
- [15] Leite, F. L.; Bueno, C. C.; Da Róz, A. L.; Ziemath, E. C.; Oliveira, O. N. (2012). *Theoretical Models for Surface Forces and Adhesion and Their Measurement Using Atomic Force Microscopy*. International Journal of Molecular Sciences.
- [16] *London dispersion forces*, 2012, URL: https://chem.libretexts.org/Bookshelves/Physical_and_Theoretical_Chemistry_Textb

[ook Maps/Supplemental Modules \(Physical and Theoretical Chemistry\)/Physical Properties of Matter/Atomic and Molecular Properties/Intermolecular Forces/Specific Interactions/London Dispersion Interactions](#), (pristupljeno 29.8.2020)

- [17] London, F.: The general theory of molecular forces, Paris, 1936
- [18] Oršučić, M.: *Primijenjena mehanika, statika*, Visoka pomorska škola u Splitu, Split, 1999
- [19] *Polarnost molekula i međumolekulske interakcije*. URL: <https://hr.izzi.digital/DOS/844/885.html>, (pristupljeno 20.8.2020)
- [20] Roberts, J. K.; Orr, W. J. C. (1938). *Induced dipoles and the heat of adsorption of argon on ionic crystals*. Transactions of the Faraday Society.
- [21] T. Calderon, C; Mohazzab, P :Premelting, Pressure melting and regelization of ice revisited, 2018.
- [22] *Trenje klizanja i kotrljanja*. URL: https://vts.edu.rs/wp-content/uploads/2017/05/Mehanika_I_12.pdf, (pristupljeno 2.9.2020)
- [23] *van der Waals forces*. URL: [https://chem.libretexts.org/Bookshelves/Physical_and_Theoretical_Chemistry_Textbook_Maps/Supplemental_Modules_\(Physical_and_Theoretical_Chemistry\)/Physical_Properties_of_Matter/Atomic_and_Molecular_Properties/Intermolecular_Forces/Van_der_Waals_Forces](https://chem.libretexts.org/Bookshelves/Physical_and_Theoretical_Chemistry_Textbook_Maps/Supplemental_Modules_(Physical_and_Theoretical_Chemistry)/Physical_Properties_of_Matter/Atomic_and_Molecular_Properties/Intermolecular_Forces/Van_der_Waals_Forces), (pristupljeno 25.8.2020)
- [24] *Viskoznost*. URL: <https://www.wikiwand.com/hr/Viskoznost#/overview>, (pristupljeno 3.9.2020)

POPIS SLIKA

Slika 1. Gruba površina brusnog papira.....	1
Slika 2. Hidrodinamičko trenje klizaljke [8].	2
Slika 3. Paljenje vatre s pomoću sile trenja.....	3
Slika 4. Stopalo gekona.....	4
Slika 5. Primjer privlačenja podloge i molekula zbog VDW sila [15].	5
Slika 6. Primjer induciranja kratkotrajnog dipola.....	7
Slika 7. Utjecaj oblika molekule na snagu sile.....	7
Slika 8. Eksperimentalno dokazivanje da sila trenja ne ovisi o veličini dodirne površine [5]	10
Slika 9. Primjer zaglavljivanja grubih površina	10
Slika 10. Odnos sile i trenja kroz vrijeme	11
Slika 11: Sile koje djeluju na tijelo prilikom klizanja.....	12
Slika 12. Skica drvenog bloka	14
Slika 13. Primjer kuta i stošca trenja	15
Slika 14. Sile koje djeluju na tijelo na kosini	16
Slika 15. Sile koje djeluju na cilindrično tijelo prilikom kotrljanja	18
Slika 16. Primjer strujanja fluida kroz cijev s promjenom promjera.....	20
Slika 17. Stokesov zakon	21
Slika 18. Tangencijalna sila sloja tekućine u 2D.....	23
Tablica 2. Primjer koeficijenta otpora zraka za različite oblike karoserije automobila	24
Slika 19. Korištenje malog koeficijenta trenja snijega za zabavu	26

POPIS TABLICA

Tablica 1. Primjer različitih koeficijenata trenja među materijalima	9
Tablica 2. Primjer koeficijenata otpora zraka za različite oblike karoserije automobila.....	24

POPIS KRATICA

LDF (engl. London dispersion forces)

VDW

Londonove sile disperzije

Van der Waals