Fibonaccijev niz

Kuvačić, Roko

SVEUČILIŠTE U SPLITU

POMORSKI FAKULTET U SPLITU

ROKO KUVAČIĆ

FIBONACCIJEV NIZ

ZAVRŠNI RAD

SPLIT, 2021.

SVEUČILIŠTE U SPLITU

POMORSKI FAKULTET U SPLITU

STUDIJ: BRODOSTROJARSTVO

FIBONACCIJEV NIZ

ZAVRŠNI RAD

MENTOR:

Marina Laušić, predavač

STUDENT:

Roko Kuvačić (MB:0171279355)

SPLIT, 2021.

SAŽETAK

Od početka ljudske povijesti primiјećena je pojava matematike i povezanost brojeva sa stvaranjem svega što okružuje ljudsko biće. Uska povezanost matematike i prirode oduvijek je postojala i prije nego što su je ljudi počeli istraživati. Razvoj čovječanstva uvelike je utjecao i na sam razvoj matematike kao znanosti. Brojevni sustavi i numeriranje dolazi u kasnijoj povijesti s potrebom kompleksnije matematičke komunikacije. Pojavom brojevnih sustava dolazi potreba za jasnijim pisanjem i razumijevanjem sustava. Fibonaccijevi brojevi i sustav jedni su od tih sustava koji su opisani u ovom radu. Izvedene formule potječu od svojstava Fibonaccijevih brojeva i služe za lakše računanje unutar samog sustava. Cilj ovog rada je ponajprije upoznavanje sa Fibonaccijevim brojevima i nizom, kao i opisivanje zanimljivih pojava tih brojeva u prirodi i povijesti.

Ključne riječi*: matematika, Fibonaccijevi brojevi, brojevni sustav*

ABSTRACT

From the beginning of human history, the appearance of mathematics and the connection of numbers with the creation of everything that surrounds a human being has been noticed. The close connection between mathematics and nature has always existed even before humans began to explore it. The development of mankind has greatly influenced the very development of mathematics as a science. Number systems and numbering come in later history with the need for more complex mathematical communication. With the appearance of number systems comes the need for clearer writing and understanding of said systems. Fibonacci numbers and its system are one of those systems described in this paper. The derived formulas are formed from the properties of Fibonacci numbers and serve to facilitate computations within the system itself. The aim of this paper is primarily to get acquainted with Fibonacci numbers and series, as well as to describe interesting phenomena of these numbers in nature and history.

Keywords: *math, Fibonacci numbers, number system*

SADRŽAJ

1. UVOD

Većina ljudskog postojanja opisana je brojevima, vrijeme, strukture, mjerenja, računanja i slično. Sve pojave brojeva su prirodne i prethodno definirane. Susretanje s matematikom je neizbježno te je na pojedincima da istražuju i proširuju svoje znanje u tom području ljudske znanosti. Pojam Fibonaccijevih brojeva primjenjivao se kroz stoljeća dok se njihovo pojavljivanje pronalazilo u gotovo svim aspektima ljudskog postojanja, umjetnost i arhitektura. Nekih od najvećih povijesnih umova bavili su se u nekom periodu svog života sa Fibonaccijevim brojevima i primjenjivali ih u svojim područjima znanosti.

U ovom radu opisana su razna svojstva Fibonaccijevog niza brojeva i njihova primjena ponajprije u matematici. Fibonaccijevi brojevi pojaviti će se i u prirodi na raznim apstraktnim mjestima. Važnost ovih brojeva iskazuje se najviše u matematici, korišteni su za dokazivanje raznih teorema i pronalaženju novih korisnih formula, također igraju veliku ulogu u olakšavanju računanja brojeva koji su članovi Fibonaccijevog niza. Cilj istraživanja primarno je upoznavanje sa svojstvima Fibonaccijevih brojeva i navođenje zanimljivih činjenica i primjera gdje se pojavljuju u prirodi. Osim toga opisan je doprinos raznih znanstevnika kroz povijest u matematici i drugim znanostima.

Ovaj rad sastavljen je od uvoda, zatim u drugome poglavlju rada dolazi do opisivanja matematike općenito kao znanosti i njenog mjesta u povijesti te kako su je ljudi definirali kroz stoljeća. Također u istom poglavlju opisuje se povijest matematike i tri važnija razdoblja matematičke povijesti koja se ujedno najviše dotiču teme rada. Nakon povijesti matematike opisan je stvaratelj Fibonaccijevog niza sam Leonardo Fibonacci i njegovi najveći doprinosi matematici. U trećem poglavlju razrađeni su matematički nizovi i njihove vrste, osnovna svojstva i osnovne formule kojima se izračunavaju određeni parametri unutar tih nizova. Opisana su tri niza aritmetički, geometrijski i konvergentan. Četvrto ujedno i najopširnije poglavlje opisuje Fibonaccijev niz i njegovu pojavu u prirodi i matematici. Za matematiku su opisani najpoznatiji primjeri uporabe Fibonaccijevih brojeva, od pojave brojeva u geometriji pa sve do stvaranja jedinstvenog brojevnog sustava temeljenog na Fibonaccijevim brojevima. Posebna pažnja posvećena je temi zlatnog reza, najviše zbog njegove neizbježne pojave u prirodi i umjetnosti. Peto, zadnje poglavlje zaključak je rada, donesen na temelju opisanih argumenata i podataka u radu.

2. MATEMATIKA

2.1. MATEMATIKA OPĆENITO

Matematika nema opću definiciju. Aristotel je matematiku definirao kao znanost o količini i ta je definicija prevladavala do 18. stoljeća. S vremenom Aristotel je također primijetio da usredotočenost samo na količinu možda neće razlikovati matematiku od znanosti poput fizike, te po njegovom mišljenju, apstrakcija i proučavanje količine kao svojstva izdvajale su matematiku od drugih znanosti.

U 19. stoljeću studij matematike počinje jačati, s njime Aristotel počinje raspravljati o apstraktnim temama poput teorije skupina i projektivne geometrije, koje nemaju jasan odnos prema veličini i mjerenju. Matematičari i filozofi počeli su predlagati niz novih definicija, unatoč tome veliki broj profesionalnih matematičara ne zanima se za definiciju matematike ili je ne može definirati. Nema čak ni dogovora oko toga je li matematika umjetnost ili znanost.

Znatan doprinos matematici pružio je njemački matematičar Carl Friedrich Gauss koji matematiku naziva kraljicom znanosti, njegov predložak potvrdio je Marcus du Sautoy koji tvrdi da je matematika jedna od glavnih pokretačkih snaga znanstvenih otkrića. Filozof Karl Popper primijetio je da je većina matematičkih teorija, poput onih iz fizike i biologije, hipotetičko-deduktivna, tvrdeći da je čista matematika puno bliža prirodnim znanostima čije su hipoteze nagađanje.

Matematika dijeli mnogo zajedničkog s mnogim poljima fizičkih znanosti, posebno s primjenom deduktivne logike kao procesa razumijevanja dvije ili više premisa u svrhu dobivanja logičkog zaključka. Intuitivnost i eksperimentacija s ostvarenim saznanjima igraju važnu ulogu u matematici i ostalim znanostima. Eksperimentalna matematika nastavlja rasti na važnosti unutar polja matematike dok računanje i simulacije igraju sve veću ulogu u znanosti kao i u matematici [22], [20].

2.2. POVIJEST MATEMATIKE

Naši preci imali su općenitu osjetljivost na količinu i instinktivno su znali razliku između jedne ili dvije životinje. Međutim, intelektualni skok od konkretne ideje dviju stvari do izuma simbola ili riječi trajao je mnogo vjekova. Danas u Amazoniji još uvijek postoje očuvana izolirana plemena sa društvenim ustrojem lovaca i sakupljača, koji imaju iznimno malu količinu nazivlja za brojeve u usporedbi sa današnjim formalnim sustavima brojeva. Posljedica nerazvijenosti leži u činjenici da nedostatak razvijene poljoprivrede i trgovine zahtijeva znatno manju potrebu za formalnim sustavom brojeva.

Rani čovjek pratio je redovite pojave poput mjesečevih faza i godišnjih doba, neki od najranijih dokaza čovječanstva i njegova služenja s brojkama potječu iz Afrike u urezanim kostima za koje je pretpostavljeno da datiraju i do 20 000 godina prije Krista. Pronađeni dokazi prikazuju osnovnu vještinu za brojanje i zbrajanje, ali ovo se ne može ni početi uspoređivati s matematikom koju danas poznajemo [20].

Slika 1: Ishango kost [20]

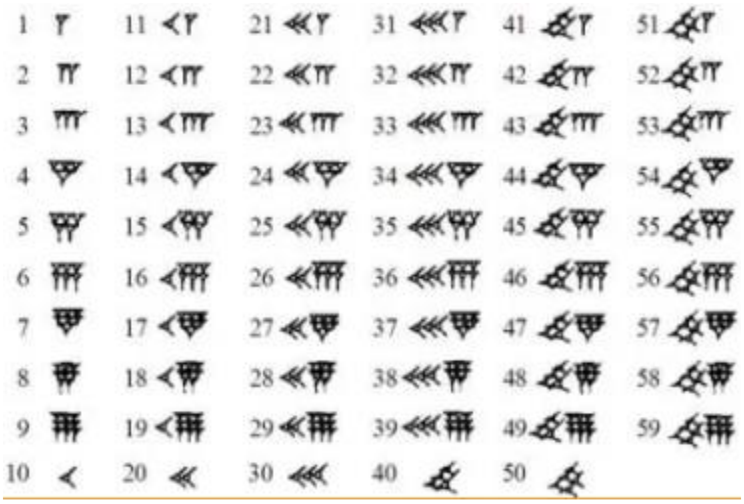
Prije pojave dinastija Egipćana i Sumerana isti su predstavljali geometrijske nacrte na svojim artefaktima već u 5. tisućljeću prije Krista. Geometrijski nacrti pronađeni na ostatcima tih artefakta spoznaju se više kao umjetnički izražaj tih društava nego sustavno prepoznatljive figure, oblici i veličine koji se kasnije koriste u matematici. Prava matematika se u početku uglavnom razvijala za potrebe birokracije, kada su se civilizacije naseljavale i razvijale poljoprivredu, za mjerenje zemljišnih posjeda i oporezivanje posjednika. Ova pojava događa se prvi put u sumerskoj i babilonskoj civilizaciji Mezopotamije i u starom Egiptu.

Prema nekim zapisima, postoje dokazi o osnovnim aritmetičkim i geometrijskim zapisima na petroglifima na grobljima Knowth i Newgrange u Irskoj koji se datiraju do 3200 godina prije Krista. Stonehenge je također jedan od poznatijih primjera uporabe osnovne matematike, ovaj neolitički, ceremonijalni i astronomski spomenik u Engleskoj, koji datira oko 2300 godina prije Krista, prikazuje primjer uporabe mjerenja kutova u krugu. Sustav koji se vjerojatno razvio neovisno o seksagezimalnom sustavu brojanja drevnih Sumerana i Babilonaca [20].

2.2.1. Sumerska matematika

Sumer kao regija Mezopotamije poznata i kao kolijevka civilizacije rodno je mjesto pisanja, kotača, poljoprivrede, navodnjavanja i mnogih drugih inovacija. Sumerani su razvili najraniji poznati sustav pisanja, piktografski sustav, poznat kao klinasto pismo. Zapisivanjem klinastih znakova na ploče od pečene gline, na kojima su ujedno pronađeni dokazi o postojanju kompleksnijih matematičkih izračuna unutar seksagezimalnom sustava.

Sumerska i babilonska matematika temeljila se na numeričkom seksagezimalnom sustavu baze 60, koji se mogao fizički izbrojati pomoću dvanaest zglobova prstiju s jedne ruke i pet prstiju s druge ruke. Za razliku od Egipćana babilonski brojevi koristili su sustav vrijednosti gdje su znamenke napisane u lijevom stupcu predstavljale veće vrijednosti kao u modernom decimalnom sustavu s time da su koristili bazu 60 umjesto današnje baze 10. Broj 60 predstavljen je istim simbolom kao i broj 1 zato što im je nedostajao ekvivalent decimalne točke [20].



Slika 2: Babilonski sustav brojeva [20]

Pretpostavlja se da značajni babilonski napredak u matematici vjerojatno pogodovao činjenici da 60 ima mnogo djelitelja, on je najmanji cijeli broj djeljiv sa svim cjelobrojnim brojevima od 1 do 6. Utjecaj seksagezimalnog sustava primjećuje se u kontinuiranoj uporabi računanja vremena kao 60 sekundi u jednoj minuti ili 60 minuta u jednome satu, sistemi računanja koji su pokazatelji upečatljivog utjecaja drevnih babilonskih sustava u današnjem vremenu. Babilonci su također razvili revolucionarni matematički koncept, nešto što Egipćani i većina drugih civilizacija nisu posjedovali, znak kruga što mi danas prepoznajemo kao nulu. U vrijeme Babilona taj simbol nije imao isto značenje kao i danas već je predstavljao rezervirano mjesto umjesto znamenke odnosno broja.

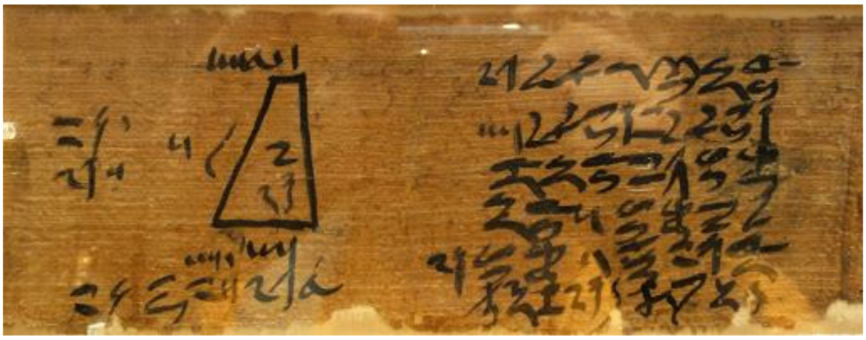
Kvadratni brojevi i kvadratne jednadžbe pojavile su se u matematičkom problemu mjerenja nepravilne površine kopna. Babilonske glinene ploče daju nam prve dokaze o rješavanju kvadratnih jednadžbi u svrhu izračuna tog problema. Babilonski pristup rješavanju obično se vrtio oko geometrijske igre rezanja i premještanja oblika, iako se također pojavljuje upotreba algebre i kvadratnih jednadžbi. Babilonci su koristili geometrijske oblike u izgradnji i dizajnu zgrada te u izradi kockica za zabavne igre koje su bile vrlo popularne u njihovom društvu, poput drevne igre Tavla. Njihova se geometrija proširila na izračunavanje površina pravokutnika, trokuta i trapeza, kao i volumena jednostavnih oblika poput opeke i cilindara [10].

Slika 3: Igra Tavla iz Babilonije [10]

2.2.2. Egipatska matematika

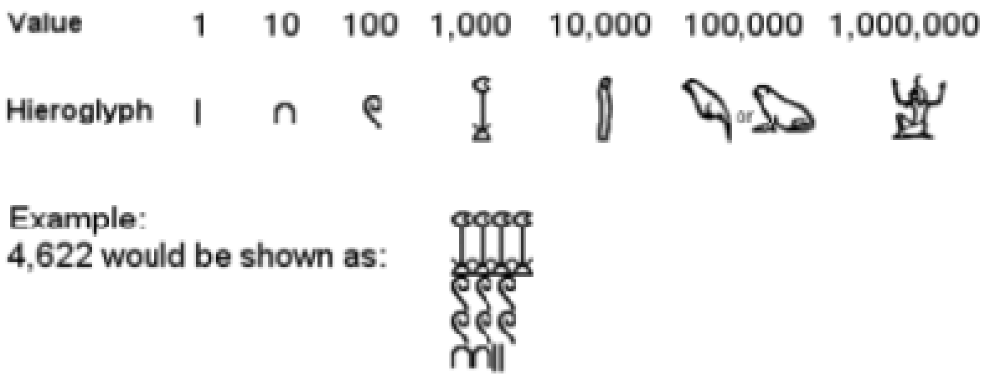
Rani Egipćani naselili su se uz rijeku Nil već oko 6000 godina prije Krista, a počeli su numerički bilježiti mjesečeve faze i godišnja doba iz poljoprivrednih i vjerskih razloga. Faraonovi geodeti koristili su mjerenja na temelju dijelova tijela, dlan je bio širina ruke i lakat mjera od lakta do vrha prstiju. Tim sustavom obavljali su mjerenje zemljišta i zgrada vrlo rano u egipatskoj povijesti, a decimalni numerički sustav kasnije je razvijen na temelju sustava deset prstiju.

Najstariji do sada otkriveni matematički tekst iz drevnog Egipta je Moskovski papirus koji potječe iz egipatskog srednjeg kraljevstva oko 2000 godina prije Krista. Pisanje brojeva radilo se u obliku kombinacija simbola sa raznim brojevnim vrijednostima [11].



Slika 4: Moskovski papirus [11]

Smatra se da su Egipćani uveli najraniji potpuno razvijeni osnovni sustav brojanja u bazi 10 otprilike 2700. godina prije Krista. Zapisani brojevi, hijeroglifi koristili su liniju za jedinice, simbol pete kosti za desetke, svitak konopa za stotine i biljku lotusa za tisuće te mnoge druge hijeroglifske simbole za brojke iznad tisuću pa sve do milijun. Međutim, nije postojao koncept vrijednosti mjesta, pa su veći brojevi bili poprilično nepojmljivi. Za primjer nepojmljivosti promatran je broj milijun koji je trebao biti samo jedan znak dok broj milijun minus jedan zahtijeva pedeset i četiri kombinirana hijeroglifa za njegovo definiranje.



Slika 5: Drevni egipatski hijeroglifi i brojevi [20]

Piramide su jedan od mnogih pokazatelja sofisticiranosti egipatske matematike. Na njima se prvi put primjećuje uporaba zlatnog reza, kompozicijski zakon u kojem se manji dio prema većem odnosi kao veći dio prema ukupnom, u umjetnosti poznat kao zlatni omjer. Piramide također pružaju dokaz da su Egipćani poznavali formulu za volumen piramide kao i za krnju piramidu. Među ostalim bili su svjesni, davno prije Pitagore, pravila pravokutnog trokuta, gdje trokut sa stranicama 3, 4 i 5 daje savršen pravi kut, ili egipatski trokut [11], [20].

2.2.3. Srednjovjekovna matematika

Tijekom stoljeća u kojima su kineski, indijski i islamski matematičari bili u usponu, Europa je ušla u mračno doba, u kojem su znanost, matematika i gotovo svi ostali znanstveni napori bili obustavljeni. Prvi veliki europski srednjovjekovni matematičar bio je Talijan Leonardo iz Pize, poznatiji kao Fibonacci. Iako najpoznatiji po takozvanom Fibonaccijevom nizu brojeva, možda je njegov najvažniji doprinos europskoj matematici bila njegova uloga u širenju uporabe hinduističko-arapskog brojevnog sustava po cijeloj Europi početkom 13. stoljeća. Taj sustav nedugo nakon uvođenja zamijenio je rimski brojevni sustav te otvorio put razvoju Europske matematike [20].

Naš vlastiti brojevni sustav, sastavljen je od deset simbola 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. Naziva se hinduističko-arapski sustav. On je decimalni sustav u bazi 10 jer se vrijednosti mjesta povećavaju za potenciju od deset. Ovaj sustav brojeva također se naziva položajnim, na primjer položaj simbola 5 u broju 5369 daje mu vrijednost mnogo veću od vrijednosti simbola 6 u tom istom broju. Razvoj ovih deset simbola i njihova upotreba u pozicijskom sustavu dolazi nam prije svega iz Indije. Njemački srednjovjekovni matematičar Regiomontanus bio je možda najsposobniji matematičar 15. stoljeća, a njegov glavni doprinos matematici bio je na području trigonometrije. Ustanovio je trigonometriju kao jedinstvenu cjelinu u području matematike izvan dotadašnje primjene u astronomiji. Izdao je matematički rad po imenu De Triangulis, u kojoj je opisao veliki dio osnovnog trigonometrijskog znanja koje se sada predaje u srednjim školama i na fakultetima, to je jedna od prvih značajnijih knjiga o trigonometriji koja se pojavila u tiskanom obliku [23].

2.3. LEONARDO FIBONACCI

Leonardo Fibonacci rođen je 1170 godine u Pizi, talijanskom gradu u Toskani. Fibonacci na talijanskom jeziku znači sin Bonaccia, mjesnog pisara iz Pize, s kojim je Leonardo većinu svog života putovao kao diplomat i trgovac. Dio svog života proveo je u Alžiru i drugim tadašnjim arapskim zemljama., upravo tamo spoznao je svoju naklonost prema arapskoj matematici. Među ostalim najviše se bavio arapskom algebrom i pozicijskim brojevnim sustavom. Znanje prikupljeno na tim putovanjima utjecalo je na stvaranje rada Knjiga računanja, koju je napisao u Pizi. Ovaj matematički rad postati će jedno od najutjecajnijih istraživanja matematike za Europu u sljedeća tri stoljeća od njena nastanka. Fibonacci je poslan na proučavanje izračuna kod arapskog majstora. Kasnije je otišao u Egipat, Siriju, Grčku i Siciliju, gdje je proučavao različite numeričke pozicijske sustave.

Poznato je da putovanja Europljana u to vrijeme nisu bila isključivo radi matematike, već su ona bila velikim dijelom motivirana potrebom za trgovinom, Piza kao talijansko mjesto imalo je razvijene trgovačke putove i veze sa arapskim pokrajinama, od Carigrada preko Egipta pa sve do današnjeg Alžira [22].

Kad se Fibonaccijev Liber Abaci, knjiga računanja, prvi put pojavila hinduističko-arapski brojevi bili su poznati tek nekolicini europskih intelektualaca kroz prijevode spisa arapskog matematičara iz 9. stoljeća, oni su demonstrirali upotrebu brojeva u aritmetičkim operacijama, zatim su te osnovne tehnike primjenjivali na praktične birokracijske probleme kao što su razmjena dobara, promjena novca i računanje kamate.

Fibonacci je svoja putovanja završio oko 1200. godine i u to se vrijeme vraća u rodni grad Pizu. Tamo je napisao niz važnih djela koja su igrala veliku ulogu u oživljavanju drevnih matematičkih vještina i time je dao svoj vlastiti doprinos matematici. Fibonacci je živio u dane prije tiska, pa su njegove knjige pisane rukom, a jedini način da se dobije kopija jedne njegove knjige bila je da se napravi ručno prijepis. Poznato je da su napisani neki drugi radovi koji su nažalost izgubljeni. O Fibonaccijevom životu nema puno informacija niti o njegovoj obitelj malo se zna osim nekoliko činjenica opisanih u njegovim matematičkim spisima, unatoč tome lako se može reći da su Fibonaccijeva djela imala iznimno velik utjecaj na razvoj srednjovjekovne europske matematike i ostavila trajni utisak u današnjem vremenu. Njegova djela kao i većina djela ostalih povijesno značajnih znanstvenika i matematičara tek su dobila pripadajuće zasluge stoljećima kasnije. Tijekom 15. stoljeća njegovo stvaralaštvo dolazi do najvećeg izražaja i cijeni se tek nekoliko stoljeća nakon njegove smrti [23].

Slika 6: Leonardo Fibonacci [12]

2.3.1. Fibbonacijevo stvaralaštvo

Liber Abaci (Knjiga računanja) povijesni je latinski aritmetički rukopis kojeg je napisao Leonardo Fibonacci u Pizi 1202. godine. Liber Abaci bila je među prvim zapadnjačkim knjigama koja je opisala hinduističko arapski numerički pozicijski sustav brojeva i upotrijebila simbole slične današnjim arapskim brojevima.

Nakon objave knjige računanja Fibonnaci je pozvan na suradnju sa tadašnjim talijanskim carem Frederikom II. i njegovim učenicima, razmjenjujući razne probleme s njima. Fibonacci iz tog razloga kasnije napisano djelo posvećuje Fredericku II. po imenu Liber quadratorum Knjiga kvadratnih brojeva. Djelo je pisano po istraživanjima grčkog matematičara 3. stoljeća Diofanta, temelji se na jednadžbama drugog stupnja odnosno jednadžbama koje sadrže kvadrate. Liber quadratorum smatra se Fibonaccijevim najvažnijim djelom. Riječ je o sustavno uređenoj zbirci teorema, koje je mnoge izmislio autor i koristio vlastite dokaze za izradu općih rješenja. Među ostalim najkreativnijim radom smatrala se teorija o podudarnim brojevima. Brojevi koji daju isti ostatak kada se podijele s danim brojem. Izradio je i originalno rješenje za pronalaženje broja koji kada se zbroji ili oduzme od kvadratnog broja, ostane kvadratni broj.

Iako je Liber Abaci bio utjecajniji za srednjovjekovnu Europu i šireg opsega od Liber quadratorum, djelo o kvadratnim jednadžbama svrstava Fibonaccija u grupu stvaratelja teorije brojeva skupa s Diofantom i francuskim matematičarom iz 17. stoljeća Pierrea de Fermata. Teorija brojeva grana je čiste matematike koja je posvećena proučavanju cjelobrojnih brojeva i funkcija. Osim njegove uloge u širenju upotrebe hinduističko arapskih brojeva, Fibonaccijev doprinos matematici uglavnom je zanemaren. Njegovo ime poznato je modernim matematičarima uglavnom zbog Fibonaccijevog niza izvedenog iz problema u Liber abaci [8], [23].

3. MATEMATIČKI NIZOVI

Matematički niz definiran je na sljedeći način. Niz u skupu X predstavlja funkcija $x : \mathbb{N} \rightarrow X$ ili ponekad i $x : \mathbb{N}_0 \rightarrow X$. Niz može biti konačan ako je od n članova funkcija $x : \mathbb{N}_n \rightarrow X$. Vrijednost nekog niza $x(k)$ zove se k-ti član niza i piše se x_k. Niz možemo zapisati kao $x_1, x_2, x_3, x_4, . . . , x_n, . . .$ ili na kraći način samo kao (x_n) gdje x_n predstavlja n-ti opći član niza.

Zadanom nizu može se pravilom izračunati sljedeći član niza, poznavajući prethodni broj u nizu i poznavajući početak niza, za primjer se koristi Fibonaccijev niz (F_n). Fibonnaccijev niz zadan je sa $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, a svaki njegov sljedeći član zbroj je dva prethodna člana. To se primjećuje na sljedećim primjerima:

$$F_2 = F_0 + F_1 = 0 + 1 = 1$$

$$F_3 = F_1 + F_2 = 1 + 1 = 2$$

$$F_4 = F_2 + F_3 = 1 + 2 = 3$$

Iz navedenih primjera izvedena je formula za izračun n-tog člana u Fibonaccijevom nizu a ona glasi:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n ; n \geq 0 \tag{1}$$

Osim navedenih nizova važnu ulogu u matematici imaju aritmetički i geometrijski nizovi, to su dva vrlo korisna niza realnih ili kompleksnih brojeva koji imaju različita osnovna svojstva i područja primjene [1], [5].

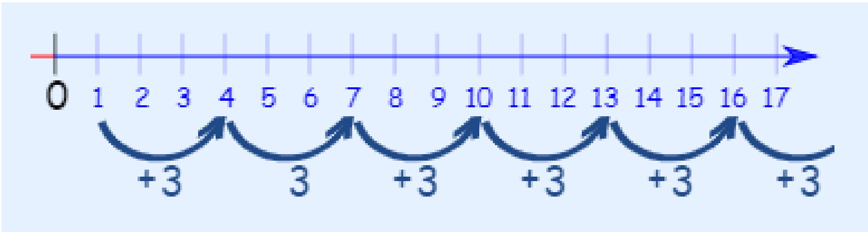
3.1. ARITMETIČKI NIZ

Aritmetički niz ili progresija niz je realnih ili kompleksnih brojeva kod kojeg se svaki član počevši od drugog jednak prethodnom članu uvećanom za konstantu d koja se naziva diferencija aritmetičkog niza. Tako se može zaključiti vrijednost d iz sljedećih primjera:

$$F_n = \{1, 2, 3, 4, 5, 6 ,. . .\} \Rightarrow d = 1$$

$$F_n = \{1, 3, 5, 7, 9, 11,. . .\} \Rightarrow d = 2$$

$$F_n = \{1, 4, 7, 10, 13, 16,. . .\} \Rightarrow d = 3$$



Slika 7: Aritmetički niz prikazan na brojevnom pravcu [24]

Diferencija aritmetičkog niza dobivena je oduzimanjem n-tog člana niza i njegovog prethodnika, označava se s d i računa se po formuli:

$$d = a_n + a_{n-1} \tag{2}$$

Ako je $a_1,\ a_2,\ a_3,. . .$ aritmetički niz , onda vrijedi $a_2 = a_1 + d$, $a_2 = a_1 + d$ iz čega je izvedena formula za računanje općeg člana aritmetičkog niza:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \tag{3}$$

Aritmetički niz sadrži osnovna svojstva od kojih su istaknuta sljedeća:

- Svaki član aritmetičkog niza osim prvog jednak je aritmetičkoj sredini susjedna dva člana.
- Ako je $a_1,\ a_2,. . .,\ a_{n-1},\ a_n$ aritmetički niz od n članova, onda je suma dva člana koji su jednako udaljeni od krajeva, jednaka sumi krajnja dva člana.
- Neka je (a_n) aritmetički niz s diferencijom d, a S_n suma prvih n članova. Tada vrijedi za sumu aritmetičkog niza [5], [24]:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n \tag{4}$$

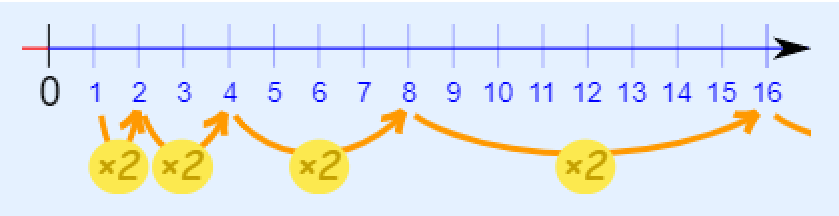
3.2. GEOMETRIJSKI NIZ

Geometrijski niz je niz realnih ili kompleksnih brojeva čiji je svaki član, počevši od drugog jednak prethodnome članu pomnoženom sa konstantom q, koja se zove kvocijent geometrijskog niza. Kvocijent geometrijskog niza označava se sa q i računa po sljedećoj formuli:

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} \tag{5}$$

Za poznavanje svih članova geometrijskog niza potrebno je poznavati prvi član a_1 i kvocijent q zadanog niza. Ako je $a_1, a_2, a_3, \ldots$ geometrijski niz, onda vrijedi sljedeće $a_2 = a_1 \cdot q$, $a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$ iz čega je izvedena formula za računanje općeg člana geometrijskog niza:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \tag{6}$$



Slika 8: Geometrijski niz prikazan na brojevnom pravcu [26]

Geometrijski niz sadrži osnovna svojstva od kojih su istaknuta sljedeća:

- Svaki član geometrijskog niza osim prvog jednak je geometrijskoj sredini susjedna dva člana.
- U konačnom geometrijskom nizu produkt članova koji su jednako daleko od krajeva, jednak je produktu krajnja dva člana

- Neka je (a_n) geometrijski niz s kvocijentom q, uz uvjet $q \neq 1$, a S_n suma prvih n članova. Tada vrijedi za sumu geometrijskog niza [5], [26]:

$$S_n = a_1 \frac{q^n + 1}{q - 1} \tag{7}$$

3.3. KONVERGENTAN NIZ

Niz se zove konvergentnim ako posjeduje graničnu vrijednost, u suprotnom radi se o divergentnom nizu. Definicija granične vrijednosti objašnjena je na sljedeći način. Za broj x kaže se da je granična vrijednost niza (a_n) ako se u njegovoj okolini $(\mathcal{E})$ nalaze gotovo svi članovi niza (a_n). Niz realnih, racionalnih ili kompleksnih brojeva (a_n) je konvergentan s limesom a, što se zapisuje kao $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, ako za svaki pozitivan broj $\mathcal{E} > 0$ postoji broj $n_0 \in \mathbb{N}$. Zapisuje se formulom:

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \mathcal{E} \tag{8}$$

Poznato je još da niz (a_n) teži prema a, ako niz teži prema 0, radi se o nul nizu. Niz (a_n) zove se Cauchyjev ili fundamentalan ako za svako $\mathcal{E} > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi [5], [25]:

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \mathcal{E} \tag{9}$$

4. FIBONACCIJEV NIZ

Fibonaccijevi brojevi koji čine Fibonaccijev niz primjenjuju se stoljećima, njihova svojstva i primjene sežu kroz područja matematike pa sve do slikarstva, umjetnosti i arhitekture. Svoje ime niz je dobio po njegovom autoru, poznatom matematičaru srednjeg vijeka Leonardu Pisanu Fibonacciju, koji je ujedno zaslužan za kasniji razvoj europske matematike. Fibonaccijevo ime najčešće se veže uz niz prirodnih brojeva:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, . . .$$

Ovaj niz dobiven je iz primjera o razmnožavanju zečeva. Članovi niza nazivaju se Fibonaccijevi brojevi, a n-ti član niza označava se kao F_n. Navedeni niz primjer je rekurzivnog niza koji je definiran pravilom da svaki član u nizu jednak je vrijednosti zbroja prethodna dva člana niza. Kao što je dokazano relacijom:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \tag{10}$$

Navedeni niz prirodnih brojeva u potpunosti je određen ovom relacijom s početnim uvjetima $F_1 = 1$ i $F_2 = 1$. Posebne zasluge pripadaju francuskom matematičaru Edouardu Lucasu, koji je Fibonaccijevim brojevima dodijelio njihovo današnje ime. Njemu u čast stvoren je niz Lucasovih brojeva, definiranih relacijom:

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \tag{11}$$

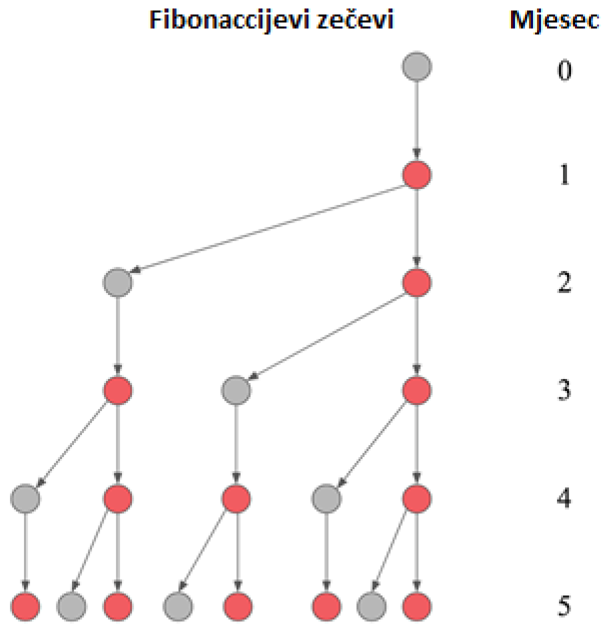
Sa početnim vrijednostima $L_1 = 1$ i $L_2 = 3$.

Fibonaccijevi brojevi proučavaju se u mnogobrojnim granama matematike zbog velikog interesa matematičara u njihova različita svojstva. Spominju se u teoriji brojeva i geometriji, također se metodama matematičke indukcije i primjenom Binetove formule dokazuju mnoge formule koje povezuju Fibonaccijeve i Lucasove brojeve različitih indeksa. Posebna pažnja posvećuje se svojstvima djeljivosti Fibonaccijevih brojeva, te njihovo prirodno pojavljivanje pri rješavanjima diofantskih jednadžbi [6], [3].

4.1. FIBBONACIJEV NIZ U MATEMATICI

4.1.1. Razmnožavanje zečeva

Fibonacci je u svom djelu Liber Abaci postavio sljedeći zadatak o razmnožavanju žečeva. Pretpostavka je da je jedan par novorođenih zečeva doveden na pusti otok 1. siječnja. Taj par novorođenih zečeva stvoriti će potomke svakog prvog dana u mjesecu počevši od 1. ožujka. Svaki će novi par zečeva stvoriti par potomaka u svakom prvom danu u mjesecu nakon navršena dva mjeseca života. Treba odrediti koliko će žečeva biti na pustom otoku 1. siječnja sljedeće godine [3].



Slika 9: Razmnožavanje zečeva po mjesecima [13]

Na slici je prikazana shema razmnožavanja zečeva. Na početku drugog mjeseca još uvijek postoji samo jedan par zečeva na pustom otoku, tek na početku trećeg mjeseca stvara se novi par zečeva što ukupno čini dva para. Matematički se problem rješava se na sljedeći način. Ako se označi broj parova zečeva sa (F_n) na početku n-tog mjeseca. Na početku ($n+1$) mjeseca imamo (F_{n+1}) parova, dok na početku ($n+2$) mjeseca imamo istih (F_{n+1}) pari zečeva. Samo što su sada odrasli, ali ujedno se dobiva (F_n) novorođenih parova zečeva. Iz toga proizlazi relacija:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \tag{12}$$

Sada na bazi te relacije može se lako izračunati rješenje zadatka:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

Pomoću relacije izračunato je da će godinu dana nakon 1.siječnja od dolaska prvih zečeva na pusti otok biti ukupno 233 zečeva, to je rješenje Fibonaccijeva zadatka. Svojstvo ove relacije je da se ona može ujedno primijeniti i unatrag na način da za svaki $n \geq 0$ vrijedi:

$$F_{-n} = (-1)^{n-1} F_n \tag{13}$$

Iz čega se može izračunati sljedeće:

$$F_0 = F_2 - F_1 = 0$$

$$F_{-1} = F_1 - F_0 = 1$$

$$F_{-2} = F_0 - F_{-1} = -1$$

Iz ovoga je zaključeno da relacija (13) vrijedi za sve cijele brojeve n [13].

4.1.2. Binetova formula

Binetova formula svoj naziv dobila je po francuskom matematičaru Jacquesu Philipeu Binetu, ova formula služi za računanje Fibonaccijevih brojeva unutar niza bez potrebe za računanjem članova niza koji prethode broju (F_n) koji se traži. Ako se želi izračunati trideseti Fibonaccijev broj (F_{30}) to se može učiniti na prethodno opisan način korištenjem relacije (12), te računanjem redom brojeva $F_1, F_2, F_3, F_4, . . . , F_{28}, F_{29}, F_{30}$. To znači da bi izračunali broj (F_{30}) trebali bi izračunati dvadeset devet drugih nepotrebnih brojeva u svrhu dobivanja vrijednosti traženog broja. Stvara se potreba za pronalaskom načina na koji se može izračunati Fibonaccijev broj (F_n) za zadani n broj bez računanja brojeva $F_1, F_2, F_3, . . . , F_{n-1}$ [3].

U svrhu olakšanja računanja Fibonaccijevih brojeva koristi se Binetova formula koja glasi:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \tag{14}$$

Ispravnost Binetove formule dokazana je na sljedećim prirodnim brojevima n:

Za $n = 0 \colon \Rightarrow F_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-1) = 0$

Za $n = 1 \colon \Rightarrow F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$

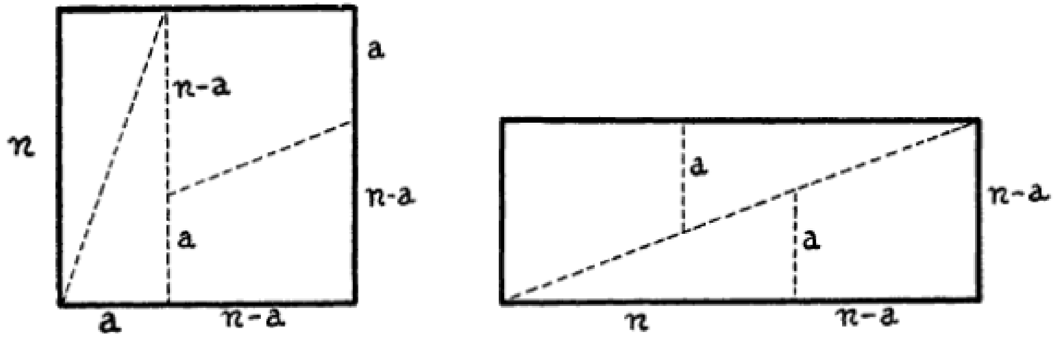
Sada pomoću Binetove formule može se riješiti problem računanja Fibonaccijevog broja (F_{30}). To se radi na sljedeći način:

Za $n = 30 \colon \Rightarrow F_{30} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{30} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{30}\right] = 1860498$

Dio Binetove formule $\alpha = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{30}$ već daje približno jednaku vrijednost Fibonaccijevom broju (F_{30}), računanje $\beta = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{30}$ smatra se sasvim suvišno već služi za zaokruživanje broja (F_{30}) na najbliži cijeli broj [3], [9].

4.1.3. Fibonaccijevi brojevi i geometrija

Pojava Fibonaccijevih brojeva u geometriji može se prikazati jednim poznatim geometrijskim paradoksom.



Slika 10: Fibonaccijev geometrijski paradoks [14]

Na slici su prikazani pravokutnik dimenzija $13 \cdot 5$ i kvadrat dimenzija $8 \cdot 8$ te su razrezani na četiri dijela, dva trapeza i dva trokuta. Prividno izgleda da su dijelovi jednakih veličina što nije moguće pošto je površina pravokutnika $P_1 = 65$, a površina kvadrata $P_2 = 64$, a logično je da $65 \neq 64$.

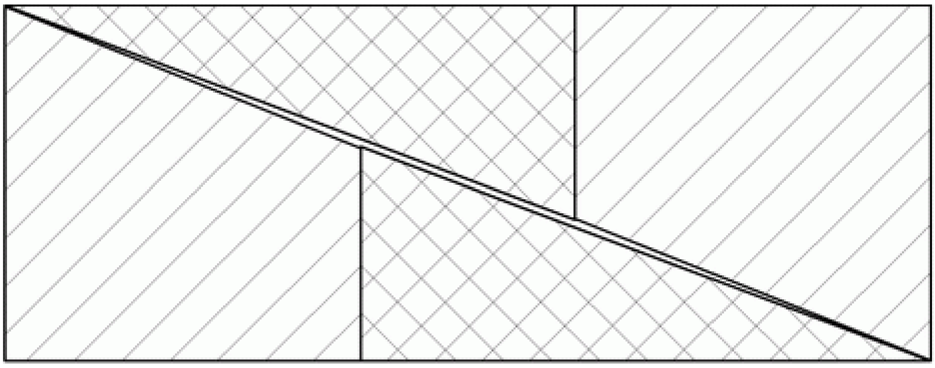
Brojevi 5, 8 i 13 prepoznati su kao susjedni članovi Fibonaccijevog niza i primiječeno je da po Cassinijevu identitetu iznosi:

$$F_{n+1} \cdot F_{n-1} - {F_n}^2 = (-1)^n \Rightarrow \; 13 \cdot 5 - 8^2 = 65 - 64 = 1$$

Cassinijev identitet dokazuje da za stvaranje geometrijskog paradoksa mogu se uzeti bilo koja tri susjedna člana Fibonaccijevog niza (F_{n-1}, F_n, F_{n+1}). Zatim se izrađuje pravokutnik dimenzija $F_{n-1} \cdot F_{n+1}$ i kvadrat dimenzija $F_n \cdot F_n$. Iz toga proizlazi svojstvo, ukoliko je n neparan broj, površina kvadrata biti će za jedan veća od površine pravokutnika. U slučaju kada je n paran broj površina pravokutnika biti će za jedan veća od površine kvadrata [3].

Za prikazati gubitak jednog kvadratića potrebno je umanjiti broj n. Na slici su prikazani pravokutnici i kvadrati za vrijednosti $n = 4$ i $n = 5$. Iz slike je primiječeno da dijagonala koja siječe pravokutnik krije paralelogram kojemu je površina $P = 1$. Postavlja se pitanje nemogućnosti uočavanja istog paralelograma na prošloj slici. Odgovor leži u visini h paralelograma koja se smanjuje s porastom dimenzija pravokutnika po formuli:

$$h = \frac{1}{\sqrt{{F_{2m}}^2 + {F_{2m-2}}^2}} \tag{15}$$



Slika 11: Paralelogram unutar pravokutnika s visinom h [16]

Manja visina h ujedno znači i veće rastezanje paralelograma po dijagonali do granice gdje nije vidljiv golim okom. Tako za primjer pravokutnika kojemu su dimenzije $34 \cdot 13$ i kvadrata dimenzija $21 \cdot 21$ visina pripadnog paralelograma iznosi 0.0445 [16].

4.1.4. Fibonaccijev brojevni sustav

U matematici se već poznaju razni brojevni sustavi među kojima su najpoznatiji dekadski i binarni brojevni sustav. U dekadskom brojevnom sustavu brojevi se prikazuju kao zbroj potencija broja 10 pomnoženih znamenkama od 0 do 9. Na sljedećem primjeru prikazano je računanje vrijednosti broja u dekadskom brojevnom sustavu:

$$xyz_{10} = x \cdot 10^2 + y \cdot 10^1 + z \cdot 10^0 = x \cdot 100 + y \cdot 10 + z \cdot 1$$

$$123_{10} = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 = 1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 1 = 123$$

Binarni sustav raspisan je na sličan način samo se umjesto potencije broja 10 koristi zbroj potencija broja 2 pomnoženih sa znamenkama 0 ili 1. Kao što je prikazano na sljedećem primjeru:

$$\begin{aligned} 10010011_2 &= 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 128 + 16 + 2 + 1 = 147_{10} \end{aligned}$$

Fibonaccijevi brojevni sustav prikazan je kao zbroj Fibonaccijevih brojeva taj brojevni sustav poprilično je sličan binarnome sustavu iz razloga što se koriste samo znamenke 0 ili 1. Broj se su Fibonaccijevom brojevnom sustavu može prikazati na više načina, u interesu većine je da taj prikaz bude što kraći. Na primjeru broja 8 uočena su dva zahtjeva Fibonaccijevih brojeva:

$$8 = F_6 = F_5 + F_4 = F_5 + F_3 + F_2 = F_5 + F_3 + F_1$$

Do nejednoznačnosti dolazi iz dva razloga. Prvi je problem što su brojevi $F_1, F_2 = 1$. Taj problem se lako rješava odlučivanjem koji broj će biti korišten, odnosno koji broj će biti u prikazu F_1 ili F_2. Drugi razlog zašto se ne pojavljuje jednoznačnost dolazi iz osnovnog svojstva Fibonaccijevog broja:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Ovo svojstvo služi za duži prikaz broja što nije u interesu većine zato se neće koristiti osim ako to nije nužno ili traženo. Na sljedećim primjerima prikazani su brojevi raspisan u Fibonaccijevom brojevnom sustavu:

$$42 = 34 + 8 = F_9 + F_6$$

$$29 = 21 + 8 = F_8 + F_6$$

$$64 = 55 + 8 + 1 = F_{10} + F_6 + F_2$$

Fibonaccijevi brojevni sustav blizak je binarnoj bazi brojeva iz razloga što se koristi u kriptografiji. Prirodni brojevi prikazani u Fibonaccijevom brojevnom sustavu mogu se na jednostavan način pretvoriti u kodove, takozvane Fibonaccijeve kodove. Ti kodovi koriste se u programiranju za laku manipulaciju podataka. Na sljedećim primjerima prikazan je zapis prirodnih brojeva kao kodova u Fibonaccijeovm brojevnom sustav:

$$\begin{aligned} 42_{10} = 34 + 8 = {} & F_9 + F_6 \\ & = 1 \cdot F_9 + 0 \cdot F_8 + 0 \cdot F_7 + 1 \cdot F_6 + 0 \cdot F_5 + 0 \cdot F_4 + 0 \cdot F_3 + 0 \cdot F_2 \\ & = 10010000_{Fib} \end{aligned}$$

$$29_{10} = 21 + 8 = F_8 + F_6 = 1 \cdot F_8 + 0 \cdot F_7 + 1 \cdot F_6 + 0 \cdot F_5 + 0 \cdot F_4 + 0 \cdot F_3 + 0 \cdot F_2 = 1010000_{Fib}$$

Kada bi se složio kompleksniji niz od dva ili više Fibonaccijeva koda ne bi se znalo gdje jedan kod počinje i gdje završava. U Zeckendorfovom teoremu dokazano je da ne postoje susjedne jedinice u zapisu prirodnog broja u Fibonaccijevoj brojevnoj bazi. Došlo je do zaključka da kako se dodavanjem jedinice može razlikovati gdje jedan broj počinje a drugi završava. Tako da bi zapis dva Fibonaccijeva koda u nizu izgledao ovako [3], [14]:

$$42_{10} = 10010000_{Fib}$$

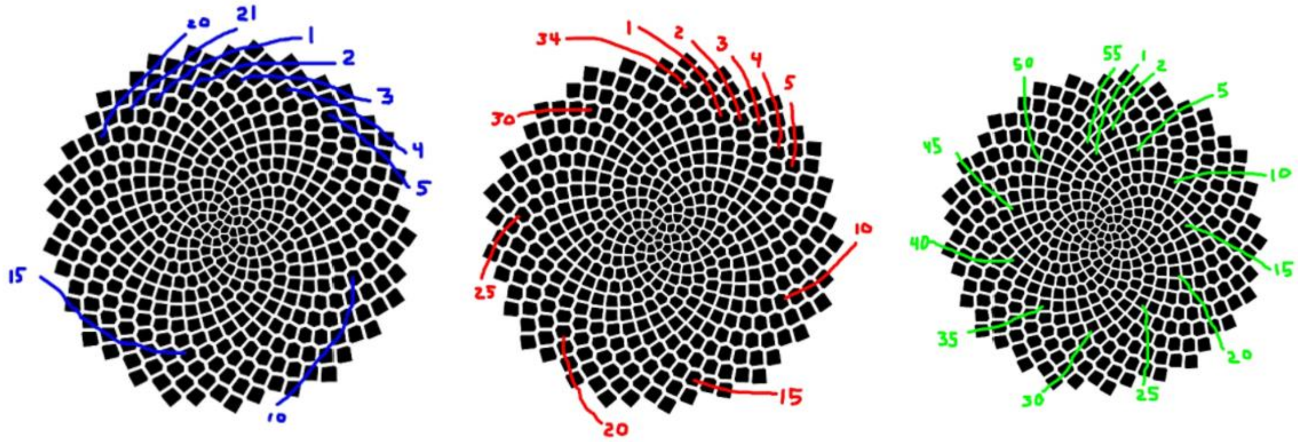
$$29_{10} = 1010000_{Fib}$$

$$42_{10}, 29_{10} = \overbrace{10010000}\,1\,\overbrace{1010000}_{Fib}$$

4.2. FIBONACCIJEV NIZ U PRIRODI

4.2.1. Fibonaccijevi brojevi i biljke

Pojava Fibonaccijevih brojeva u prirodi primijećena je na rasporedu listova koji rastu oko stabljike kod biljaka. U većine biljaka listovi su raspoređeni na način da gornji listovi ne prekrivaju donje listove od sunčeve svjetlosti. Listovi na stabljici poredani su o obliku navoja. Zaokret jednog lista do sljedećeg oko stabljike dio je punog okreta. Ako je određeno da biljka ima n listova u m punih okretaja onda je rečeno da postoji n/m listova u jednom okretu. Primijećeno je da su u mnogo biljaka brojevi m i n Fibonaccijevi brojevi. Sličan fenomen pojavljuje se i pri rastu grana na stablima. U biljaka koje nemaju cilindrični nego kružni oblik Fibonaccijevi brojevi pojavljuju se na drukčiji način. Jedan od najpoznatijih primjera je glava suncokreta koja ima veliki broj sjemenki. Sjemenke su poredane spiralno počevši iz središta u smjeru kazaljke na satu ili obrnuto. Primijećeno je da brojevi spirala koje se kreću u jednom ili drugom smjeru imaju vrijednost susjednih Fibonaccijevih brojeva. Tako za odrasle biljke suncokreta vrijednosti spirala najčešće su 34 u jednome smjeru i 55 spirala u drugom smjeru. Kod manjih suncokreta pronađene su kombinacije spirala 21 i 34 ili 13 i 21 [3], [8].



Slika 12: Spirale na glavama suncokreta [15]

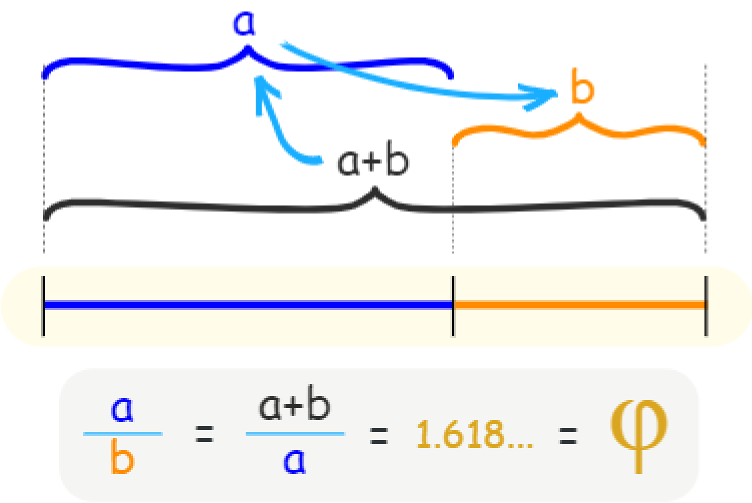
Razlog pojavljivanja Fibonaccijevih brojeva u prirodi je taj što su omjeri susjednih Fibonaccijevih brojeva, predstavljaju najbolje moguće racionalne aproksimacije iracionalnog broja $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Broj α može se aproksimirati razlomcima oblika F_{n+1}/F_n.

Ovaj broj naziva se omjer zlatnog reza koji se pojavljuje ne samo u prirodi već i u umjetnosti i arhitekturi. Dobiva se dijeljenjem dužine na dva dijela tako da omjer većeg dijela prema manjem bude jednak omjeru cijele dužine prema većem dijelu. Ako je duljina većeg dijela a, a duljina manjeg b slijedi sljedeće [15], [21]:

$$a : b = (a + b) : a$$

4.2.2. Zlatni rez

Zlatni rez, u matematici poznat kao zlatni ili božanski omjer, čini broj $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ čija je vrijednost približno $\alpha \approx 1.618033989$. To je omjer dva segmenta linije presječene na dva dijela različite duljine. Omjer cijelog segmenta i duljeg segmenta jednak je omjeru duljeg i kraćeg segmenta linije. Zlatni rez kompozicijski je zakon gdje se dijeljenjem duljina na jednake dijelove (F_n) i dijeljenjem tih jednakih duljina u omjeru Fibonaccijevih susjednih brojeva (F_{n-1}/F_{n-2}) dolazi do broja α. Što se više jednakih podjela duljina napravi to je omjer bliži aproksimaciji α [3].

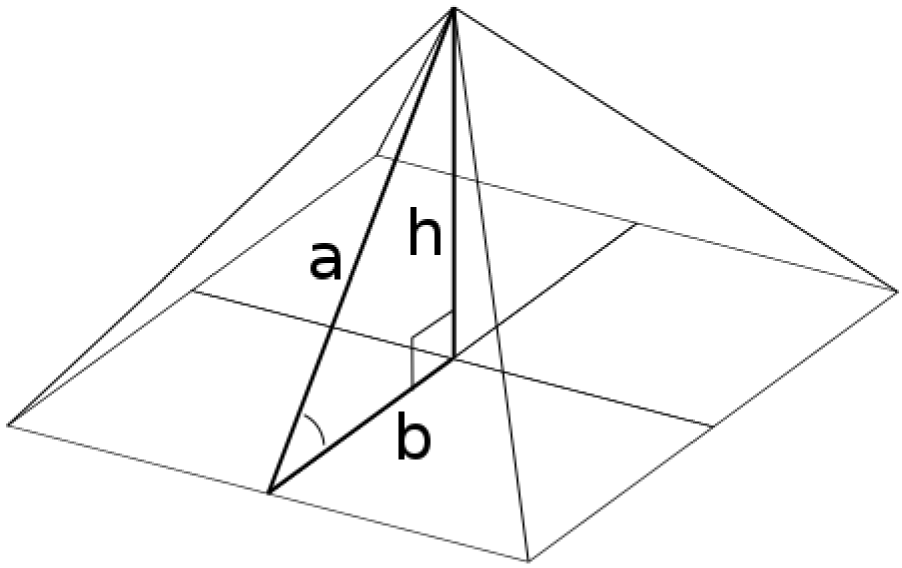


Slika 13: Podjela duljine linije u omjeru zlatnog reza [6]

Zlatni omjer inspirirao je najveće matematičke umove da ga stoljećima proučavaju. Antički matematičari poput Pitagore i Euklida, srednjovjekovni talijanski matematičar Fibonacci i astronom Kepler jedni su u nizu velikih umova koji su proučavali svojstva zlatnog omjera i njegovog pojavljivanja u prirodi, umjetnosti i arhitekturi. Može se reći da je zlatni omjer jedan od najmisterioznijih brojeva u matematičkoj povijesti. Johannes Keplerov trokut jedan je primjer primjene zlatnog omjera skupa sa Pitagorinim poučkom, time je dobiven pravokutni trokut sa stranicama u zlatnom omjeru. Ovaj pravokutni trokut pojavljuje se pri arhitekturi egipatskih piramida [21].

Egipatske piramide su jedan od poznatijih primjera pojavljivanja zlatnog omjera. U analizi piramida s bazom koju čini kvadrat primijetile su se pojave zlatnog omjera. Kod piramide visina a koja leži na stranici piramide jednaka je umnošku kuta α i pola širine baze. Piramida s ovim svojstvom naziva se zlatna piramida. Omjer kojim se opisuje pravokutni trokut unutar piramide zapisan je na sljedeće načine:

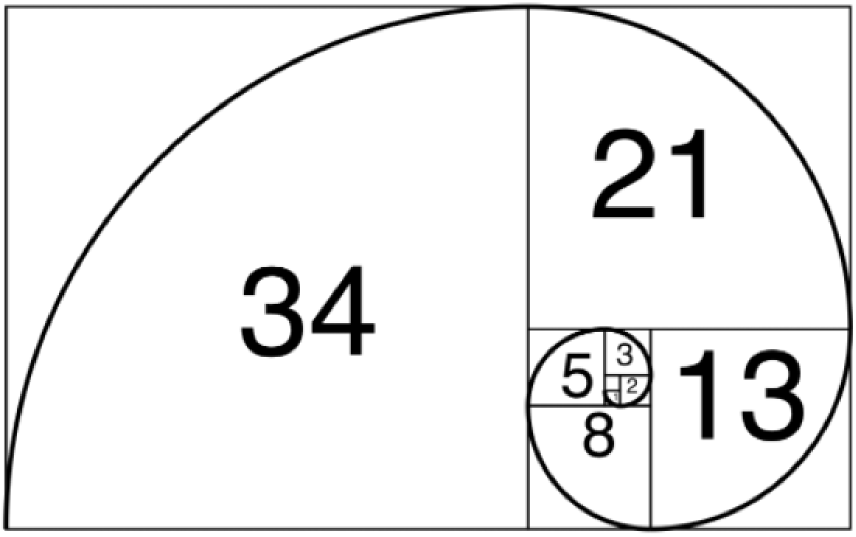
$$b : h : a = 1 : \sqrt{\alpha} : \alpha = 3 : 4 : 5 = 1 : \frac{4}{\pi} : 1.61899$$



Slika 14: Matematička piramida i pravokutni trokut [17]

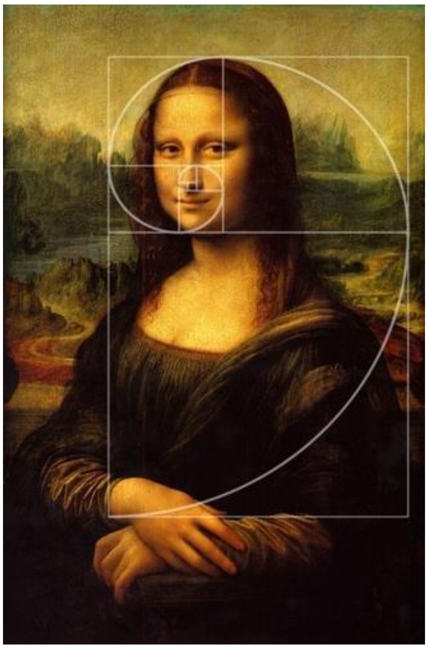
Sličan tip piramide opisan je u matematičkom papirusu Rhind kojeg su napisali drevni Egipćani, rad se temeljio na trokutu sa stranicama $3 : 4 : 5$. Neke od najpoznatijih egipatskih piramida vrlo su slične ovim matematičkim piramidama. Jedna od poznatijih egipatskih piramida je ona u Gizi poznata kao Keopsova piramida. Promatran je kut nagiba Keopsove piramide i time je primijećeno svojstvo slično zlatnoj piramidi u matematici. Kut nagiba koji zatvaraju visina a i pola visine baze piramide iznosi $51°$ što je približno kutu nagiba zlatne piramide [14], [17].

Zlatni pravokutnik još je jedna od mnogih stvari koja se proizašla iz teorije zlatnog reza. Ako se nacrta pravokutnik s dvije suprotne stranice u omjeru zlatnog reza i druge dvije suprotne stranice kao vrijednost većeg dijela omjera dobije se zlatni pravokutnik. Oblikovan je na način da se sastoji od kvadrata i manjeg pravokutnika gdje je manji pravokutnik također takozvani zlatni pravokutnik. Ponovnim dijeljenjem manjeg pravokutnika dobije se još manji zlatni pravokutnik kao što je prikazano na slici. Kontinuiranim umanjivanjem dobije se spiralni oblik koji je pronađen na mnogim mjestima u prirodi i umjetnosti. Na primjer spiralni oblici na školjkama i kučicama puževa te čak i oblici galaksija.



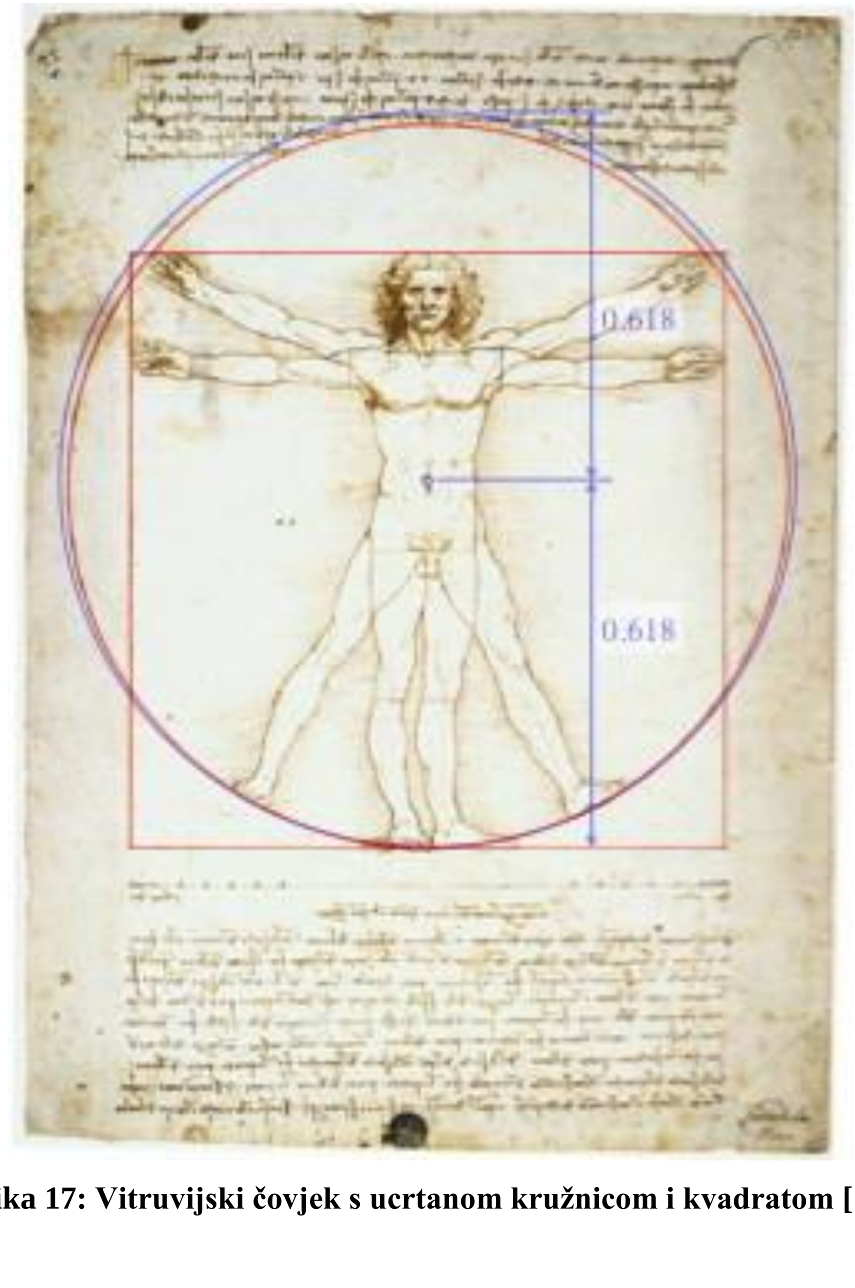
Slika 15: Zlatni pravokutnik i formacija spirale [18]

U umjetnosti se često spominje pojam božanske proporcije, istoimenu knjigu napisao je Luca Pacioli, Divina proportione. U njegovom radu istraživana je matematika zlatnog reza i njena primjena za dobivanje oku ugodnih proporcija na umjetničkim radovima pogotovo slikama. Slika poznatog renesansnog slikara Leonarda da Vincija, Mona Lisa, jedna je od najpoznatijih slika na svijetu i primjer pojave božanskog omjera, pretpostavilo se da je nacrtana u tom omjeru, iako to nikad nije sam Leonardo potvrdio [27].



Slika 16: Mona Lisa i zlatni omjer [27]

Slično se govori i za njegov rad slika Vitruvijevog čovjeka. Omjer stranice kvadrata prema polumjeru kružnice na toj poznatoj slici odgovara zlatnom rezu s odstupanjem od 1.7%. Leonardo da Vinci konstruirao je proporcije ljudskog tijela u pravilu zlatnog reza kao što je prikazano na slici. Razdijelio je ljudsko lice u trećine te prikazuje da je u ljudsko tijelo moguće ucrtati kvadrat i kružnicu. Visina čovjeka jednaka je visini raširenih ruku, te postavljanjem ruku i nogu i dijagonalu čovjek postaje središte kružnice [19].



Slika 17: Vitruvijski čovjek s ucrtanom kružnicom i kvadratom [19]

4.2.3. Fibonaccijevi brojevi i zlatni rez

Za dokazivanje veze između Fibonaccijevih brojeva i zlatnog reza uzeti su sljedeći primjeri i pretpostavka:

F_{n+1}/F_n
$\frac{2}{1} = 2.0000$
$\frac{3}{2} = 1.50000$
$\frac{5}{3} = 1.66666$
$\frac{8}{5} = 1.60000$
$\frac{13}{8} = 1.62500$
$\frac{987}{610} = 1.61803$
$\frac{1597}{987} = 1.618034$

Iz tablice je zaključeno da Fibonaccijevi brojevi stvaraju niz brojeva koji konvergiraju do granične vrijednosti $\alpha \approx 1.618033989$, odnosno omjeru zlatnog reza. Ovo svojstvo otkrio je Johannes Kepler u 17. stoljeću, pomoću Binetove formule [13].

Pojavljivanje Fibonaccijevih brojeva moguće je primijetiti bilo gdje ako se radi o malim brojevima s obzirom da je prvih šest članova Fibonaccijevog niza manje od deset. Unatoč toj činjenici dolazi do pretpostavke da je ljudsko tijelo rađeno po proporcijama zlatnog omjera. Ljudsko tijelo sastoji se od jedne glave, dvije ruke i noge, tri zgloba u jednom prstu, pet prstiju na svakoj ruci, trideset četiri kralješka i slično. Ovo su sve Fibonaccijevi brojevi, to je primijetio i francuski arhitekt Charles Edouard Jeanneret. On tvrdi da su proporcije ljudskog tijela zasnovane na zlatnome rezu i Fibonaccijevim brojevima. Izračunao je visinu tijela pupka i vrhova prstiju s podignutim rukama, te stavljajući mjerenja u omjer dolazi do brojke koja je približno jednaka vrijednosti zlatnog reza. Smatrao je da bi lice u proporcijama zlatnog omjera prikazivalo savršenu ljepotu oblika [14].

5. ZAKLJUČAK

Razvoj brojevnih sustava uvelike je olakšao snalaženje s brojevima pri računanju. Razni brojevni sustavi nisu osuđeni na jedno područje korištenja već se mogu upotrijebiti u raznim područjima ljudske znanosti. Bio to binarni sustav u programiranju, dekadski u računanju ili Fibonaccijev u kodiranju. Fibonaccijevi brojevi, niz i brojevni sustav imaju važnu ulogu u umjetnosti, slikarstvu i arhitekturi. Iako postoje znanstveni dokazi za njihovo pojavljivanje u matematici kroz povijest, lako je zaključiti da je zbog njihove savršene kompozicije moglo doći do njihovih slučajnih pojavljivanja u prirodi i arhitekturi pa čak i umjetnosti. Široki spektar znanstvenih umova dao je znatne doprinose razvoju Fibonaccijevih brojeva i njihovoj uporabi. Zlatni omjer je jedan od najpoznatijih primjera upotrebljavanja brojeva za dobivanje oku ugodne kompozicijske estetike.

U ovom radu glavni zadatak je bio upoznati pojedinca sa Fibonaccijevim brojevima. Nakon upoznavanja sa osnovama nizova i poviješću razvoja matematike, definiran je Fibonacci i njegovo stvaralaštvo. Na početku rada definirana je matematika kao znanost i mnoga druga imena koja su joj matematičari kroz povijest davali. Zatim su opisana značajnija povijesna razdoblja matematike među kojima su istaknuta sumerska, egipatska i srednjovjekovna. Svaka od njih ima svoje doprinose koji se i danas koriste. Nakon opisivanja Fibonaccija i njegovih radova opisuju se vrste nizova i njihova svojstva. Aritmetički, geometrijski i konvergentan niz jedni su važnijih nizova s kojima se susrećemo u matematici. Nakon upoznavanja sa osnovnim matematičkim nizovima posebna cjelina posvećena je Fibonaccijevom nizu. Fibonaccijev niz u matematici se pronalazi u mnogim primjerima kao što su: razmnožavanje zečeva, razvoj Binetove formule, geometrijski problemi, kodiranje i sl. Osim u matematici Fibonaccijevi brojevi pojavljuju se i u prirodi. Najpoznatiji primjeri vezani su za rast listova i grana na stabljikama biljaka te kod spiralne orijentacije suncokretovih sjemenki.

Zlatni rez je kompozicijski zakon koji se pronalazi u umjetnosti i arhitekturi. Iako je većina pretpostavki o pojavi božanskog omjera u umjetnosti i arhitekturi izvedena tek kasnije kroz povijest, bez potvrde samih autora nikada neće biti dokazano jesu li ti radovi stvarno imali veze sa zlatnim omjerom ili je pravilo zlatnog reza toliko opće primjenjivo da se na većini poznatijih umjetničkih djela slučajno pojavljuje.

LITERATURA

[1] Dobrosavljević, R.: *Matematika I* : Fakultet za pomorstvo i saobraćaj Rijeka, Rijeka, 1982.

[2] Dobrosavljević, R.: *Matematika I* : Pomorski fakultet Rijeka, Rijeka, 2002.

[3] Dujella, A.: *Fibonaccijevi brojevi* : Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2000.

[4] Grigas, A.: *The Fibonacci Sequence* : Liberty University, Lynchburg, 2013.

[5] Pavković, B.: *Elementarna matematika 1* : Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2004.

[6] Štimac, D.: *Fibonaccijevi brojevi* : Prirodslovno-matematički fakultet u Zagrebu, Zagreb, 2016.

[7] Veljan, D.: *Elementarna matematika 1* : Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2004.

[8] Vickrey, T.: *Fibonacci Numbers* : Faculty of the Graduate College of the Oklahoma State University, Oklahoma, 1968.

[9] Watson, A.: *The Golden Relationships: An Exploration of Fibonacci Numbers and Phi* : Duke University Biology Department, Durham, 2017.

[10] https://www.theseawithinhealingarts.com/writings/the-spiritual-back-bone-of-backgammon, (pristupljeno 19.06.2021.)

[11] https://igonzalez1.weebly.com/blog/the-moscow-papyrus, (pristupljeno 19.06.2021.)

[12] https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=19431, (pristupljeno 19.06.2021.)

[13] https://science.nu/the-fibonacci-sequence-and-linear-algebra/, (pristupljeno 20.06.2021.)

[14] https://www.jstor.org/stable/2302608, (pristupljeno 20.06.2021.)

[15] https://momath.org/home/fibonacci-numbers-of-sunflower-seed-spirals/, (pristupljeno 28.06.2021.)

[16] https://mathematicscentre.com/taskcentre/155_6465.htm, (pristupljeno 26.06.2021.)

[17] https://bs.wikipedia.org/wiki/Datoteka:Mathematical_Pyramid.svg, (pristupljeno 26.06.2021.)

[18] https://www.studypug.com/blog/beauty-and-the-beast/, (pristupljeno 27.06.2021.)

[19] http://www.crl.nitech.ac.jp/~ida/education/VitruvianMan/, (pristupljeno 26.06.2021.)

[20] https://www.storyofmathematics.com/prehistoric.html, (pristupljeno 15.06.2021.)

[21] https://hr.wikipedia.org/wiki/Zlatni_rez, (pristupljeno 25.06.2021.)

[22] https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fibonacci/, (pristupljeno 21.06.2021.)

[23] https://www.britannica.com/biography/Fibonacci#ref235946, (pristupljeno 21.06.2021.)
[24] https://www.mathsisfun.com/algebra/sequences-sums-arithmetic.html, (pristupljeno 15.06.2021.)
[25] https://mathworld.wolfram.com/ConvergentSequence.html, (pristupljeno 15.06.2021.)
[26] https://www.mathsisfun.com/algebra/sequences-sums-geometric.html, (pristupljeno 15.06.2021.)
[27] https://www.researchgate.net/figure/Monalisas-face-and-the-Fibonacci-spiral-Source_fig4_343350295, (pristupljeno 26.06.2021.)

POPIS SLIKA