Čudesan broj pi

Bočkaj, Antonio

Undergraduate thesis / Završni rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Split, Faculty of Maritime Studies / Sveučilište u Splitu, Pomorski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:164:479915

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-05-20**

Repository / Repozitorij:

Repository - Faculty of Maritime Studies - Split - Repository - Faculty of Maritime Studies Split for permanent storage and preservation of digital resources of the institution

SVEUČILIŠTE U SPLITU

POMORSKI FAKULTET

ANTONIO BOČKAJ

ČUDESNI BROJ π

ZAVRŠNI RAD

SPLIT, 2023.

SVEUČILIŠTE U SPLITU

POMORSKI FAKULTET SPLIT

POMORSKA NAUTIKA

ČUDESNI BROJ π

ZAVRŠNI RAD

MENTOR: **STUDENT:**

Goran Kovačević **Antonio Bočkaj (0171276673)**

SPLIT, 2023.

SAŽETAK

Broj π s razlogom se može nazvati *čudesnim brojem*. Već stotinama i tisućama godina fascinira matematičare, a i znanstvenike općenito, svojom zagonetnom beskonačnošću. Što točnije ga odrediti bio je primarni cilj. Kako doći do što točnije formule za izračun, kako ga primijeniti na poljima matematike i arhitekture, problemi su koji su golicali umove znanstvenika kroz povijest. Isto je i danas, kada postoji svojevrsna računalno-algoritamska utrka koja je istovremeno i sprint i maraton – u što kraćem roku doći do što većeg broja točnih decimala koje se sada već broje u stotinama milijarda.

Ključne riječi: čudesni broj, beskonačnost, formule, matematika, arhitektura, decimale

ABSTRACT

There is a reason why number π is called *the magical number*. For more than a couple of hundreds and thousands of years it fascinates mathematicians, and scientists alike with its enigmatic infinity. The prime goal is the more exact value of it. How to get to the more correct formula and how to apply it in a field of math and architecture are problems which intrigued the minds of scientists through the history. Same is today, when there is a kind of computer-algorithm race which at the same time is sprint and marathon – in the least time possible to get to a greater number of decimals which are now already counted in hundreds of billions.

Key words: magical number, infinity, formulas, math, architecture, decimals

SADRŽAJ

1. UVOD

Tema ovog završnog rada je broj π. Broj se u radu naziva čudesnim zbog svoje posvemašnje prisutnosti i intrigantnosti koje ga karakteriziraju, a upravo to i jest ono što je stavljeno u fokus u ovom radu. Rad želi prikazati način na koji se kroz povijest dolazilo do sve većeg broja (točnih) decimala, kako se taj broj koristio u različitim civilizacijama te kako je pridonosio razvoju znanosti, prvenstveno matematike i arhitekture.

Drugo poglavlje rada govori općenito o broju π, njegovim matematičkim karakteristikama, njegovoj prisutnosti u matematičkim formulama i problemima. Također, navedeno je nekoliko primjera njegove praktične primjene.

Treće poglavlje obrađuje π kroz povijest, odnosno kako su znanstvenici u srednjem vijeku, u doba renesanse te u novije vrijeme dolazili do formula kojima su željeli doći do što boljih aproksimacija tog broja.

Slijedi poglavlje o matematičkoj definiciji broja π te o njegovoj primjeni u geometriji, analizi, u problemu kvadrature kruga i kod računanja vjerojatnosti (Buffonov eksperiment). Spominje se i njegova primjena u fizici i kozmologiji.

Peto poglavlje daje pregled algoritama za određivanje aproksimacija broja π, a to su: Monte Carlo algoritam, Bailey-Borwein-Plouffe algoritam, Ramanujanov algoritam, Chudnovsky algoritam, Leibnizova formula te Gaussov algoritam.

Šesto poglavlje se bavi računanjem točnih decimala broja π koje je postalo utrka kao što je rečeno u sažetku. Navedena je tablica s godinama, izvođačima računa, brojem točno izračunatih znamenki te utrošenim vremenom.

Sedmo poglavlje navodi nekoliko zanimljivosti o broju π koje najbolje opisuju fasciniranost koju on izaziva.

Završni rad završava zaključkom.

Svrha rada je pokazati koliku važnost π ima kroz prošlost i sadašnjost te što bolje upoznati različite karakteristike i mogućnosti primjene broja π.

2. OPĆENITO O BROJU π

Broj π, poznat još i kao Ludolphov broj ili Arhimedova konstanta, je transcendentan broj koji se koristi u matematici i fizici kao omjer opsega kruga i njegovog promjera.

Transcendentan broj je broj koji nije korijen nijednog polinoma s cjelobrojnim koeficijentima. [34] Svaki transcendentan broj je ujedno i iracionalan pa je tako π i iracionalan broj. Iracionalan broj je broj koji se ne može prikazati u obliku razlomka, kao omjer dvaju cijelih brojeva. Iracionalnost broja π dokazuje Lambert 1761., a transcendentnost Lindemann 1882. godine. [11]

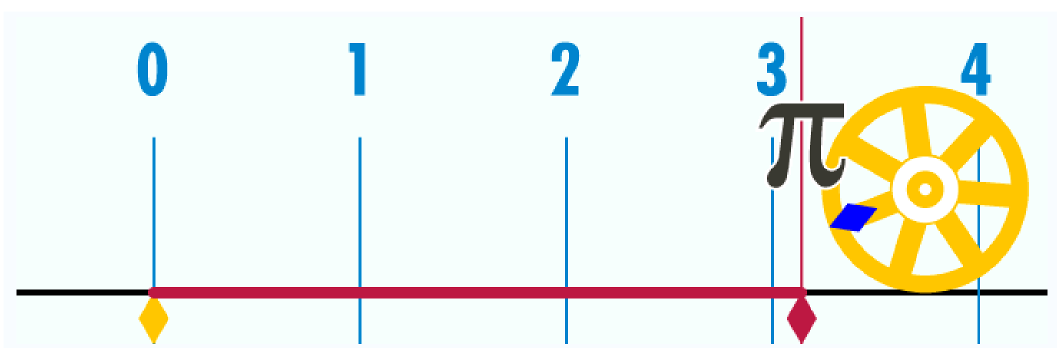
Broj π ima beskrajan decimalni zapis koji počinje s

$$3.14159265358979323846\ \ldots.$$

Tijekom stoljeća, mnogi matematičari su pokušavali dobiti što točniju aproksimaciju broja π, a današnje računalo može točno izračunati milijarde početnih znamenaka.

Broj π sadrže mnoge matematičke formule, npr.

- formula za površinu kruga ($P = r^2\pi$)
- formula za opseg kruga ($O = 2r\pi$)
- formula za brzinu jednolikog kružnog gibanja $\left(v = \frac{2r\pi}{T}\right)$
- formula za valnu duljinu $\left(\lambda = \frac{2\pi}{k}\right)$



Slika 1. Grafički prikaz vrijednosti broja π [20]

Također se pojavljuje u mnogim matematičkim problemima i teoremima, kao što su:

- Buffonov eksperiment (ispituje šanse da iglica padne preko neke linije na podu)
- Gauss-Bonnetov teorem (povezuje zatvorenu krivulju u dvodimenzionalnom prostoru s ravninskim područjem kojeg ona omeđuje)

Koristi se i u praktičnim primjenama, npr. u konstrukciji i dizajnu – pri izradi kotačića za strojeve, u navigaciji – kod određivanja geografske širine i geografske dužine, itd.

π dan se obilježava 14. ožujka svake godine jer je američki format tog datuma $3/14$, a $\pi \approx 3.14$.

3. BROJ π KROZ POVIJEST

Postoji pasus iz Biblije koji se odnosi na mjere Solomonovog hrama, a ukazuje na točnost aproksimacije broja π korištene pri projektiranju i građenju hrama oko 950. godina prije Krista. Tekst iz Biblije glasi:

> *„Tada od rastaljene kovine izli more koje je od ruba do ruba mjerilo deset lakata; bilo je okruglo naokolo, pet lakata visoko, a u opsegu, mjereno vrpcom, imalo je trideset lakata.“ (Kraljevi I 7, 23)*. [3]

Prema navedenom se da zaključiti kako se tijekom gradnje Solomonovog hrama koristila aproksimacija $\pi \approx 3$. Točnost nije velika, no veličina dijelova hrama u čijoj se izgradnji koristio broj π nije ni iziskivala visok stupanj geometrijske točnosti.

3.1. STARI EGIPAT

U starom Egiptu, korištenje broja π seže još u preddinastičko doba, oko 2500. godine prije Krista. Egipatski matematičari su koristili aproksimaciju $\pi \approx 3.16$ u računanju površine i opsega kruga te drugih geometrijskih likova. Isto tako, koristili su je u izračunavanju veličina vezanih za kružna kretanja i kružne valove.

Egipatski arhitekti i graditelji koristili su je u računanju površina pri konstrukciji hramova, piramida i drugih graditeljskih projekata.

Egipćani su općenito imali razvijen sustav računanja, a bili su vješti i s razlomcima koje su koristili za prikazivanje broja π. Slika 2. prikazuje Rhindov papirus, zapis koji datira iz 1650. godine prije nove ere, u kojemu se indirektno spominje aproksimacija $\pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3.16049$ s greškom na drugoj decimali. Naime, u tom zapisu, koji se inače pripisuje pisaru *Ahmesu*, piše: *Oduzmite 1/9 promjera od promjera, a nad ostatkom konstruirajte kvadrat – imat će istu površinu kao krug*. [11]

Slika 2. Rhindov papirus [23]

3.2. MEZOPOTAMIJA

Mezopotamski matematičari, koji su živjeli u razdoblju od oko 2000. do 1600. godine prije Krista, također su primjenjivali broj π u svojim računsko – mjernim operacijama primjenom aproksimacije $\pi \approx 3.125$. Koristili su π u iste svrhe kao i Egipćani, s time da neki izvori kazuju kako su Babilonci za njegovu vrijednost uzimali broj 3. [12]

π su još koristili u izračunavanju površine plodnih polja, konstrukciji arhitektonskih objekata i projektiranju gradskih planova, koristeći uz to mjere za površinu i volumen, te mjere za različite oblike kao što su krugovi, kvadrati i pravokutnici.

Mezopotamija je općenito poznata po svojim naprednim mjernim sustavima čiji je sastavni dio bio i broj π.

3.3. ANTIČKA GRČKA

Grci su se bavili teoretskim istraživanjem broja i prvi su shvatili da se radi o broju s beskonačno mnogo decimala. Isto tako, primjenom različitih metoda, prvi su dobili preciznije aproksimacije broja π.

Arhimed iz Sirakuze, koji je živio u 3. stoljeću prije Krista, prvi je dobio aproksimaciju $\pi \approx 3.1$ korištenjem metode *poligonalne aproksimacije* što je podrazumijevalo konstrukciju niza poligona unutar kruga i računanje njihovih površina ili opsega. U to vrijeme su bile poznate sljedeće činjenice:

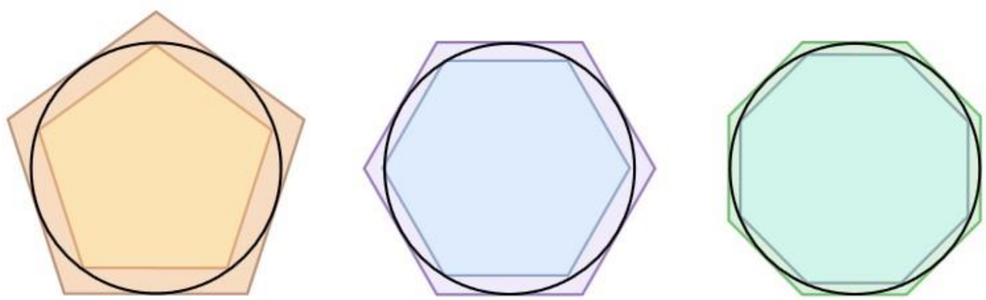
- *Površina kruga jednaka je površini pravokutnog trokuta čija je jedna kateta jednaka polumjeru, a druga opsegu kruga.*
- *Površina kruga odnosi se prema kvadratu promjera kao što se 11 odnosi prema 14.*
- *Omjer opsega kruga i njegova promjera manji je od* $3\frac{1}{7}$ i veći od $3\frac{10}{71}$. [9]

Poligonalna aproksimacija je metoda kojom se izračunava približna vrijednost broja π konstrukcijom poligona unutar ili izvan kruga. Što je broj stranica poligona veći, to je površina poligona bliža površini kruga. Slično, što je broj stranica poligona veći, to je opseg poligona bliži opsegu kruga. Arhimed je došao do aproksimacije $\pi \approx 22/7$. Znao je da je to tek približna vrijednost broja π.

Krenuo je od jednakostraničnog trokuta, pa nastavio s konstrukcijama pravilnih mnogokuta sa 6, 12, 24, 48 stranica, došavši konačno do $96 -$ terokuta. Tako je dobio procjenu

$$3.141 < \pi < 3.1428$$

i dokazao da je $223/71 < \pi < 22/7$. [11]



Slika 3. Arhimedov način određivanja opsega kruga [12]

Sve je zapisao u svojoj raspravi *O mjerenju kruga*, a zanimljivo je da Arhimed nije poznavao nulu.

Danas se poligonalna aproksimacija može izvesti i pomoću računala, koja mogu generirati poligone s velikim brojem stranica i vrlo precizno računati površine poligona. Ova metoda se još uvijek koristi za izračunavanje približnih vrijednosti broja π, iako su suvremene metode izračunavanja puno preciznije. [23]

Euklid iz Aleksandrije tvrdio je da je kružnica linija i da je riječ o „dužini bez širine“. Ovaj osnivač Aleksandrijske škole u svom dvanaestom dokazu ukazuje na postojanje broja π: *Odnos kružnog opsega i kružnog promjera isti je za sve krugove*. [23]

Aleksandrijski astronom i geograf Klaudije Ptolomej u svom *Almagestu*, metodom sličnom Arhimedovoj, dolazi do aproksimacije

$$\pi \approx 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600} \approx 3.14166667. \text{[12]}$$

Koristio je π u geografiji i astronomiji, preciznije pri računanju geografskih širina i dužina te u određivanju položaja planeta.

Eudoksus iz Knida, koji je živio u 4. stoljeću prije Krista, koristeći metodu *kružnog isječka* je također dobio preciznu aproksimaciju, $\pi \approx 3.1416$.

Grci su dali važan doprinos razumijevanju broja π i njegovoj što točnijoj aproksimaciji, a rezultati njihovih istraživanja postavili su temelje za daljnja istraživanja i primjene broja π u matematici.

3.4. KINA

Kinezi u 12. stoljeću prije Krista, isto kao i Babilonci, za π koriste broj 3. Chang Hong početkom 2. stoljeća dolazi do aproksimacije $\pi \approx \sqrt{10} \approx 3.162$, koja se potom koristila u cijeloj Aziji.

Liu Hui 263. objavljuje knjigu u kojoj opisuje vlastitu metodu – u krug je opisao poligon s 3072 stranice nakon čega je procijenio π na 3.1416. [12]
U svojoj knjizi piše:

> „*Ako se pomnože jedna stranica šesterokuta i promjera, te se taj umnožak pomnoži s 3 – dobije se površina 12-terokuta. Ako se šesterokut izreže u 12-terokut te se potom njegova stranica pomnoži s promjerom i ponovno pomnoži sa 6 – dobije se površina 24-terokuta. Što se više izrezuje, manja je greška u odnosu na površinu kruga. Svaki sljedeći izrez sve se više podudara i sjedinjuje se s krugom*.“ [23]

Razlika u odnosu na Arhimeda je u tome što je Liu Hui koristio površine mnogokuta, a ne njihov opseg kao Grk. Arhimed je opisani $96-$ terokut koristio za gornju granicu, a upisani $96-$ terokut za donju granicu. Liu Hui dobiva bolju aproksimaciju korištenjem samo upisanog $96-$ terokuta.

U petom stoljeću Tsu Ch'ungchihu i njegov sin upisivali su u krug poligone krenuvši od šesterokuta. Na kraju su došli do poligona s $24\ 576$ stranica i zaključili da je $\pi\ \approx\ \frac{355}{133} \approx 3.1415929$. Iako dugo vremena nitko izvan Kine nije saznao za njihov uspjeh, to je bila najtočnija aproksimacija sljedećih tisuću godina.

U Indiji, Arybhatta oko 530. godine računa opseg poligona koristeći sljedeću formulu:

$$b = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1-a^2}}},$$

gdje je a duljina stranice pravilnog $n -$ terokuta upisanog u kružnicu s promjerom 1, a b je duljina stranice pravilnog $2n$ −terokuta upisanog u istu kružnicu. Računanjem, koristeći poligon s 384 stranica, dobio je rezultat $\pi \approx \sqrt{9.8684}$.

Brahmagupta u 7. stoljeću računa opsege poligona s 12, 24, 48 i 96 stranica. Dobiva sljedeća rješenja: $\sqrt{9.65}$, $\sqrt{9.81}$, $\sqrt{9.86}$, $\sqrt{9.87}$ i izvlači zaključak kako se π približava broju $\sqrt{10}$. Zaključak je bio netočan. Ta netočna vrijednost proširila se iz Indije u Europu te se koristila tijekom cijelog srednjeg vijeka. [12]

3.5. SREDNJI VIJEK, RENESANSA I NOVO DOBA

U srednjem vijeku, Fibonacci (Leonardo iz Pise), jedan od rijetkih matematičara koji su u to vrijeme istraživali broj π, dobiva sljedeću procjenu:

$$\pi \approx \frac{1440}{458\frac{1}{3}} = \frac{864}{275} \approx 3.141818.$$

U renesansi, opet raste interes za broj π pa se dobivaju njegove sve točnije aproksimacije. Ludolph van Ceulen je krajem 16. stoljeća točno izračunao prvih 20 decimalnih mjesta, što je tada bila jedna od najpreciznijih aproksimacija. Koristio je metodu poligonalne aproksimacije. Značajan dio svog matematičkog i znanstvenog života posvetio je računanju što preciznije aproksimacije broja π koristeći se Arhimedovim spoznajama i metodama. Do 1596. godine uspio je izračunati prvih 35 decimala. [11]

U doba renesanse, broj π se počeo primjenjivati u različitim područjima, kao što su geometrija, fizika i računarstvo. To je pomoglo u razvoju naprednih matematičkih teorija i algoritama što su se kasnije koristili u mnogim područjima.

U kasnijem periodu, dobivena je poznata Wallisova formula:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

1699. Sharp izračunava 71 decimalu; 1701. Machin računa 100 decimala; 1873. Shanks računa 707 decimala od kojih je 527 točno.

Lindemann dokazuje da je π transcendentan broj čime je dokazao da je kvadratura kruga, kao jedan od tri grčka klasična problema, uistinu nerješiv.

John Machin računa 100 decimala broja π pomoću formule:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.$$

Glede Shanksovih 707 (527) decimala, tek je 1945. uočeno kako u nekoliko zadnjih decimala nedostaju znamenke broja 7. Razlog je bila greška na 528. decimali, nakon čega su, naravno, sve sljedeće decimale bile netočne. 1949., pomoću računala, izračunato je $2\,000$ decimala.

1706. William Jones, prvi je upotrijebio oznaku π, koju 1737. prihvaća Euler, čime ona postaje standardna notacija. [18]

Sljedeća tablica prikazuje kronološku notaciju broja.

Tablica 1. Kronološka notacija broja π [9]

Godina	Oznaka	Autor	Pisani izvor
1706.	π	Willliam Jones	*Synopsis palmariorum mathesios*
1734.	p	Leonhard Euler	*De summis serierum reciprocarum*
1739.	c	Johann Bernoulli	Pisma Euleru
1740.	π	Johann Bernoulli	Pisma Euleru
1740.	π	H. Sherwin	*Mathematical Tables*
1742.	π	Nicolaus Bernoulli	Pisma Euleru
1748.	π	Leonhard Euler	*Introductio in Analysin Infinitorum*

Euler je dokazao da za svaki realni broj x vrijedi formula:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Ako se u tu formulu uvrsti $x = \pi$, dobiva se jednakost:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

kojom se može dokazati transcendentnost broja π. Eulerovom formulom dobivene su neke od najpoznatijih formula za izračun decimala broja π:

$$\frac{\pi}{4} = 5 \arctan \frac{1}{7} + 2 \arctan \frac{3}{79}$$

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

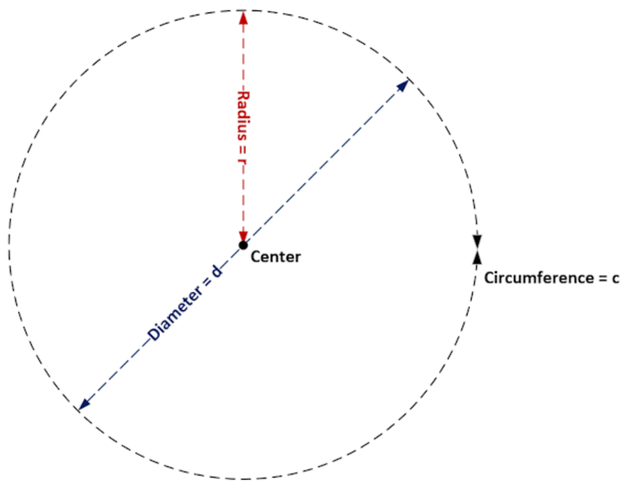
$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad [12]$$

4. MATEMATIČKA DEFINICIJA BROJA π

U euklidskoj geometriji postoje dvije definicije broja π.

Definicija 1: π je omjer opsega kruga c i promjera istog kruga d, tj.

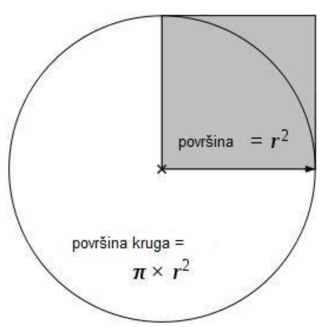
$$\pi = \frac{c}{d}.$$



Slika 4. Opseg (Circumference) kruga [21]

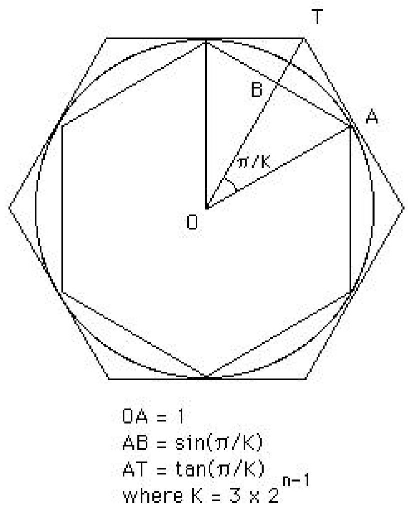
Definicija 2: π je omjer površine kruga P i kvadrata njegova polumjera r, tj.

$$\pi = \frac{P}{r^2}$$



Slika 5. Površina kruga [9]

Arhimed je, korištenjem isključivo geometrije, došao do dviju formula. Promatrao je krug polumjera 1. Razmišljao je na sljedeći način. Krugu se za svaki $n \in \mathbb{N}$ može opisati pravilni mnogokut koji ima $3 \cdot 2^{n-1}$ stranica i poluopseg a_n te upisati pravilni mnogokut s istim brojem stranica i poluopsegom b_n.



Slika 6. Primjer za $n = 2$ [9]

Vrijedi:

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}} = K \tan \frac{\pi}{K}, \qquad b_n = 3 \cdot 2^{n-1} \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}} = K \sin \frac{\pi}{K}.$$

Niz (a_n) je padajući i omeđen odozdo s π (jer je π poluopseg kruga) pa je konvergentan.

Niz (b_n) je rastući i omeđen odozgo s π pa je također konvergentan.

Oba niza konvergiraju prema π, tj. vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \pi.$$

Treba napomenuti da u to doba još nije bila poznata trigonometrija pa je sasvim sigurno da je Arhimed poluopseg računao drugačije.

U nastavku slijedi izvod formula za računanje članova nizova (a_n) i (b_n) u kojima nema trigonometrijskih funkcija. Članovi a_1 i b_1 se mogu odrediti i bez znanja trigonometrije.

$$a_1 = 3\sqrt{3}, \qquad b_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Vrijedi:

$$a_{n+1} = 3 \cdot 2^n \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} = 2K \tan \frac{\pi}{2K}$$

i

$$b_{n+1} = 3 \cdot 2^n \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} = 2K \sin \frac{\pi}{2K}$$

pa je za svaki $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}=\frac{\cos\frac{\pi}{K}}{K\sin\frac{\pi}{K}}+\frac{1}{K\sin\frac{\pi}{K}}=\frac{1}{K\sin\frac{\pi}{K}}\left(\cos\frac{\pi}{K}+1\right)$$

$$=\frac{1}{K\cdot 2\sin\frac{\pi}{2K}\cancel{\cos\frac{\pi}{2K}}}\cdot 2\cos^{\cancel{2}}\frac{\pi}{2K}=\frac{2}{2K\tan\frac{\pi}{2K}}$$

$$=\frac{2}{a_{n+1}}$$

i

$$a_{n+1}b_n=2K\frac{\sin\frac{\pi}{2K}}{\cos\frac{\pi}{2K}}\cdot K\sin\frac{\pi}{K}=2K^2\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2K}}{\cos\frac{\pi}{2K}}\cdot\sin\frac{\pi}{K}$$

$$=2K^2\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2K}}{\cancel{\cos\frac{\pi}{2K}}}\cdot 2\sin\frac{\pi}{2K}\cancel{\cos\frac{\pi}{2K}}=\left(2K\sin\frac{\pi}{2K}\right)^2$$

$$=b_{n+1}^2.$$

Primjenom algoritma

$$a_{n+1}=\frac{2}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}},\qquad b_{n+1}=\sqrt{a_{n+1}b_n}$$

za svaki $n\in\{1,\dots,5\}$, Arhimed je približno odredio a_6 i b_6, tj. išao je do opsega opisanog i upisanog $96-$terokuta, a znao je da vrijedi:

$$b_6<\pi<a_6.$$

Kako je (b_n) rastući niz, a $b_6\approx 3.14103$, onda je $b_6>3.141$ pa je i $\pi>3.141$.
Kako je niz (a_n) padajući, a $a_6\approx 3.14271$, onda je $a_6<3.1428$ pa je i
$\pi<3.1428$. Dakle,

$$3.141<\pi<3.1428.$$

Sada bi se mogli tražiti najmanji brojevi $i\in\{1,2,\dots,9\}$ i $j\in\{0,1,2,\dots,9\}$ za koje vrijedi:

$$\frac{10}{10\cdot i+j}<0.141$$

te najveći broj $k\in\{1,2,\dots,9\}$ za kojega vrijedi:

$$\frac{1}{k}>0.1428.$$

Naime, tako se dobivaju brojevi

$$i = 7, \qquad j = 1, \qquad k = 7,$$

odnosno Arhimedova aproksimacija

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Algoritam 01 Arhimedova aproksimacija (*WOLFRAM MATHEMATICA 13.2*):

```
br=6;
a=3*Sqrt[3];
b=3*Sqrt[3]/2;
For[n=2,n<=br,n++,
	a=2/(1/a+1/b);
	b=Sqrt[a*b]]
Print[SetPrecision[b,10]," \[LessEqual] \[Pi] \[LessEqual] ",SetPrecision[a,10]]

For[i=1,i<=9,i++,
	For[j=0,j<=9,j++,
		If[10/(10*i+j)<0.141,Break[]]];
	If[10/(10*i+j)<0.141,Break[]]]
Print["i=",i,",j=",j]
For[k=9,k>=1,k--,
	If[1/k>0.1428,Break[]]]
Print["k=",k]
```

4.1. PRIMJENE BROJA π U MATEMATICI

4.1.1. Geometrija

Broj π se pojavljuje u formulama za računanje površine i opsega geometrijskih likova koji sadrže krug (ili npr. kružni isječak) te područja u ravnini koje omeđuje elipsa (kao što je npr. područje koje omeđuje dio elipse i dva neparalelna pravca što sijeku elipsu). Stoga se π nalazi i u formulama za računanje obujma i oplošja geometrijskih tijela čija je jedna ploha krug (ili kružni isječak) ili područje omeđeno elipsom. [7]

Tablica 2. Matematičke formule s brojem π [23]

GEOMETRIJSKI LIK	FORMULA
OPSEG KRUGA	$O = 2r\pi$
POVRŠINA KRUGA	$P = r^2\pi$
POVRŠINA PODRUČJA U RAVNINI OMEĐENOG ELIPSOM	$P = ab\pi$
OBUJAM KUGLE	$V = \frac{4}{3}r^3\pi$
POVRŠINA SFERE	$P = 4r^2\pi$
OBUJAM VALJKA	$V = r^2v\pi$
OPLOŠJE VALJKA	$P = 2r^2\pi + 2rv\pi = 2r(r+v)\pi$
OBUJAM STOŠCA	$V = \frac{r^2v\pi}{3}$
OPLOŠJE STOŠCA	$P = r^2\pi + r\sqrt{r^2+v^2}\pi = r\left(r + \sqrt{r^2+v^2}\right)\pi$

4.1.2. Analiza

Leibnizova formula:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4}$$

Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Baselski problem (Leonhard Euler ga je prvi riješio):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Eulerova formula:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Verižni razlomak:

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \cdots}}}}}}$$

Teorija brojeva

Tvrdnja 1.

Vjerojatnost da su dva slučajno izabrana prirodna broja relativno prosti brojevi je $\frac{6}{\pi^2}$.

Algoritam 02 Provjera prve tvrdnje (*WOLFRAM MATHEMATICA 13.2*):

```
n=1000000;    m=0;
For[i=1,i<=n,i++,
        b1=RandomInteger[{1,1000}];
        b2=RandomInteger[{1,1000}];
        If[GCD[b1,b2]==1,m=m+1]]
Print[\[Pi]\[TildeTilde]SetPrecision[Sqrt[6*n/m],50]]
```

Tvrdnja 2.

Vjerojatnost da slučajno izabrani prirodni broj nema faktora oblika n^2*, gdje je* $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$*, je* $\frac{6}{\pi^2}$.

Algoritam 03 Provjera druge tvrdnje (*WOLFRAM MATHEMATICA 13.2*):

```
n=1000000;    m=0;
For[i=1,i<=n,i++,
        If[SquareFreeQ[i]==True,m=m+1]]
Print[\[Pi]\[TildeTilde]SetPrecision[Sqrt[6*n/m],50]]
```

Tvrdnja 3.

Prosječan broj načina da se prirodni broj n *zapiše u obliku zbroja kvadrata dvaju cijelih brojeva, uz pretpostavku da je redoslijed pribrojnika bitan, iznosi* π.

Algoritam 04 Provjera treće tvrdnje (*WOLFRAM MATHEMATICA 13.2*):

```
k=1000000;    m=0;
For[n=1,n<=k,n++,
        m=m+SquaresR[2,n]]
Print[\[Pi]\[TildeTilde]SetPrecision[m/k,50]]
```

4.1.3. Kvadratura kruga

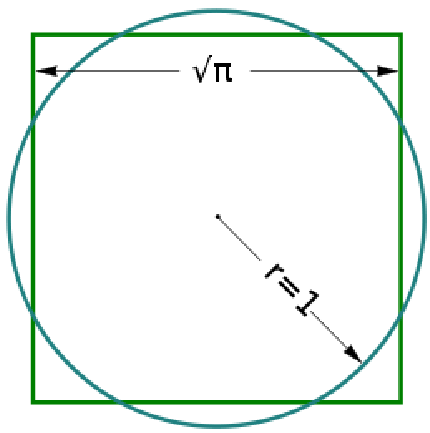
π je transcendentan broj pa nije konstruktibilan. Iz njegove nekonstruktibilnosti slijedi da je kvadratura kruga nemoguća, tj. da nije moguće konstruirati kvadrat čija je površina jednaka površini zadanog kruga korištenjem ravnala i šestara.

Kvadratura kruga vezana je uz neke od najpoznatijih antičkih problema u matematici, kao što su *duplikacija kocke* i *trisekcija kuta*.

Problem kvadrature kruga:

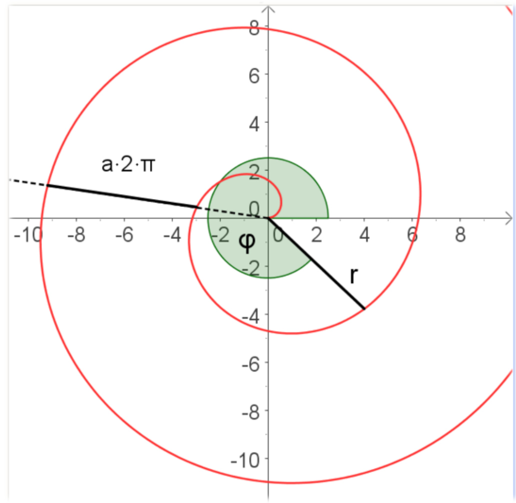
Konstruirati kvadrat čija je površina jednaka površini zadanog kruga.

Izjednačavanjem površine kvadrata $P_{\text{kvadrata}} = a^2$ i površine kruga $P_{\text{kruga}} = r^2\pi$ dobiva se $a^2 = r^2\pi$, odnosno $a = r\sqrt{\pi}$. Konstrukcija dužine duljine $r\sqrt{\pi}$, tj. $\sqrt{\pi}$ za $r = 1$, predstavlja problem. Slika 7. prikazuje kvadraturu kruga.



Slika 7. Kvadratura kruga [9]

Slika 8. prikazuje spiralu kojom se nastojao riješiti problem kvadrature kruga. [9]



Slika 8. Arhimedova spirala [9][25]

4.1.4. Vjerojatnost

Broj π se može eksperimentalno približno odrediti računanjem vjerojatnosti. Riječ je o tzv. Buffonovoj metodi za koju je potreban list papira veličine A3 i kutija šibica. Na praznom papiru povuče se niz paralelnih pravaca tako da je međusobna udaljenost svaka dva susjedna pravca jednaka duljini jedne šibice. S visine od oko 40 cm baci se određeni broj šibica (ili jedna šibica više puta) i prebroji koliko puta je šibica pala na neki pravac.

Što je veći broj bačenih šibica, točnost dobivene aproksimacije će biti veća. Ako se broj bačenih šibica pomnoži s 2 i podijeli s brojem šibica koje su sjekle neki pravac, dobije se razlomak približno jednak broju π.

$$\pi \approx 2 \cdot \frac{\text{broj bačenih šibica}}{\text{broj bačenih šibica koje sijeku neki pravac}}$$

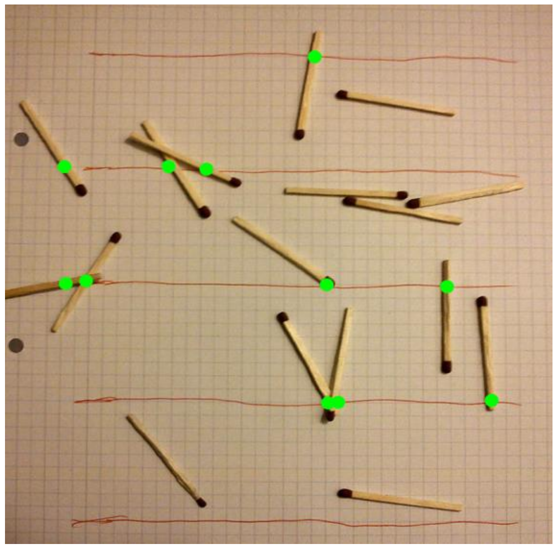
Točnost ove metode je vrlo mala. Naime, potrebno je prosuti otprilike 900 000 šibica da bi se s vjerojatnošću od 95% postigla točnost od 1%.

Punog naziva Buffonov eksperiment s iglicama, ovaj eksperiment predstavlja statističku zanimljivost. Nacrta se niz paralelnih pravaca tako da je međusobna udaljenost svaka dva susjedna pravca jednaka b. Vjerojatnost da će jedna bačena iglica duljine $a \leq b$ pasti preko nekog pravca je $\frac{2a}{\pi b}$. Dakle, ako s n označimo broj bačenih iglica i s m broj iglica koje su pale preko nekog pravca, onda vrijedi aproksimacija

$$\frac{2a}{\pi b} \cdot n \approx m,$$

odnosno

$$\pi \approx 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m}.$$



Slika 9. Buffonov eksperiment [27]

U eksperimentu sa slike, 17 šibica bačeno je na papir. Papir sadrži 5 međusobno paralelnih crvenih pravaca, a razmak između svaka dva susjedna pravca jednak je duljini jedne šibice. 11 od 17 bačenih šibica siječe neki pravac, a točke presjeka su označene zelenom bojom. Uvrštavanjem

$$n = 17, \qquad a/b = 1, \qquad m = 11$$

u formulu

$$\pi \approx 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m},$$

dobiva se:

$$\pi \approx 2 \cdot 1 \cdot \frac{17}{11} = \frac{34}{11} \approx 3.09.$$

Eksperiment je prvi izveo francuski prirodoslovac Leclerc Comte de Buffon, po kojemu eksperiment i nosi ime. Nekoliko je znakovitih pokušaja matematičara koji su pokušali ponoviti eksperiment.

- 1850. Wolf: $n = 5000$; $a/b = 0.8$; $m = 2532$; $\pi \approx 3.15956$
- 1855. Smith: $n = 3204$; $a/b = 0.6$; $m = 1218.5$
  (polupresijecanja su nejasni, tj. granični slučajevi); $\pi \approx 3.15535$
- 1860. de Morgan: $n = 600$; $a/b = 1$; $m = 382.5$; $\pi \approx 3.13725$
- 1864. Fox: $n = 1030$; $a/b = 0.75$; $m = 489$; $\pi \approx 3.15951$
- 1901. Lazzarini: $n = 3408$; $a/b = 5/6$; $m = 1808$; $\pi \approx 3.1415929$
- 1925. Reina: $n = 2520$; $a/b = 0.5419$; $m = 859$; $\pi \approx 3.17948$ [4]

Lazzarinijeva aproksimacija je, uz takav (relativno mali) broj n, malo vjerojatna pa se pretpostavlja da je rezultat friziran.

Algoritam 05 Buffon (*WOLFRAM MATHEMATICA 13.2*):

```
p=2;
a=1;
n=1000000;
m=0;
For[i=1,i<=n,i++,
	y=-1+RandomReal[]*p;
	z=RandomReal[]*\[Pi];
	k=Floor[y];
	If[y+a*Sin[z]>k+1,m=m+1]]
Print[\[Pi]\[TildeTilde]SetPrecision[2*a*n/m,50]]
```

4.2. BROJ π U FIZICI

Tablica 3. Fizikalne formule koje sadrže π [32]

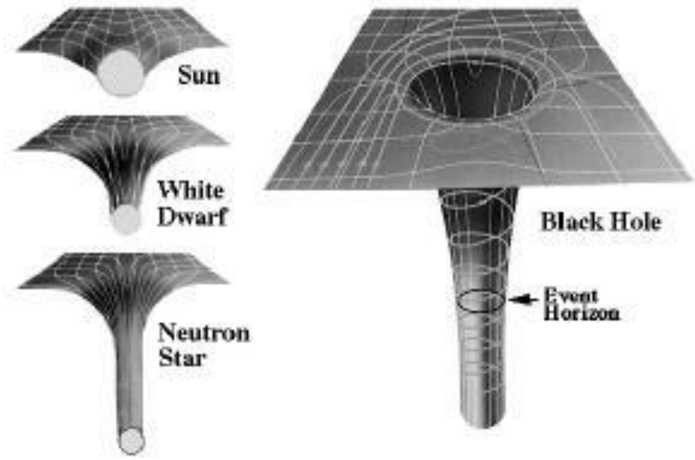
Planckova konstanta	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$
Heisenbergov princip neodređenosti	$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$
Coulombov zakon električne sile	$F = \frac{\lvert q_1 q_2 \rvert}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$
Magnetska permeabilnost vakuuma	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{N}{A^2}$
Keplerov treći zakon o gibanju planeta	$\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$
Sila izvijanja	$F = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$

4.3. π U KOZMOLOGIJI

Einstein je tvrdio da π može postojati u svemiru. Razlika fizičkog svemira i kruga je u tome što je prostor zakrivljen pa omjer opsega i promjera nije jednak π. Nacrta li se kružnica oko Zemlje, taj bi omjer bio nešto manji od π zbog mase Zemlje koja iskrivljuje okolni prostor.

Kako definirati zakrivljeni prostor? Nakon crtanja kruga oko područja takvog prostora, zaključuje se da je omjer opsega i promjera kruga manji od π, baš zbog zakrivljenosti prostora. Što je taj omjer manji, to je područje prostora zakrivljenije. Promjer kruga oko crne rupe bi težio u beskonačno pa bi omjer težio prema nuli.

Prema matematičkoj definiciji za π, π bi u fizičkom prostoru imao mnogo vrijednosti ovisno o zakrivljenosti prostora oko kruga, i nijedna vrijednost ne bi bila 3.141592 ....



Slika 10. Geometrija zakrivljenog prostora [2]

No naravno, definicija omjera opsega i promjera vrijedi samo za idealne krugove u nezakrivljenom prostoru. Krajnji zaključak je da je π matematički, a ne fizički koncept. [2]

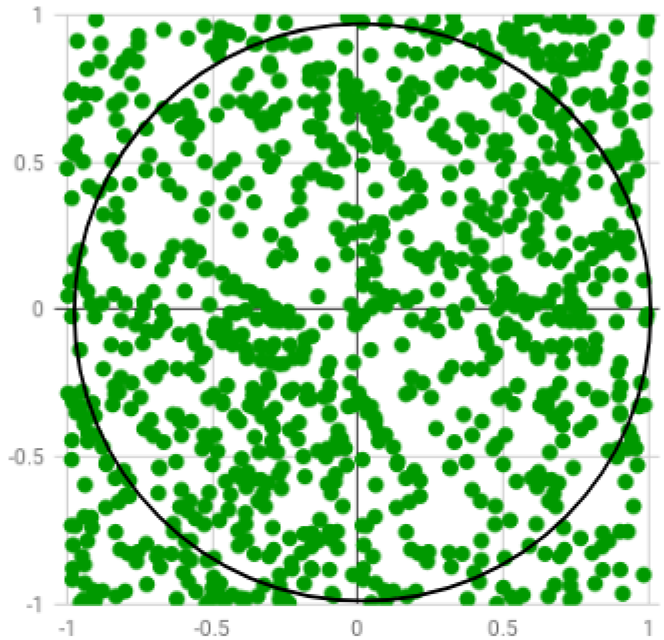
5. ALGORITMI ZA DOBIVANJE BROJA π

5.1. MONTE CARLO

Monte Carlo je metoda koja se koristi za izračunavanje približne vrijednosti broja π generiranjem velikog broja slučajno izabranih točaka unutar kvadrata kojemu je upisan krug. Zatim se računa omjer broja točaka koje se nalaze unutar kruga i broja svih generiranih točaka. Analizira se točnost procijenjene vrijednosti broja π ovisno o broju generiranih točaka, a očekivani (krajnji) rezultat je u skladu sa zakonom velikih brojeva.

Napomene radi, metoda dobiva takvo ime zbog stanovite podudarnosti s igrama u kockarnicama i igrama na sreću. Točnost procjene broja π ovom simulacijom ovisi o kvaliteti generiranog niza slučajnih ulaza i o broju izvršenih ispitivanja.

Sve se svodi na određivanje vjerojatnosti da je slučajno izabrana točka iz kvadrata ujedno i u krugu koji je upisan u kvadrat. Veći broj generiranih točaka povećava točnost procjene. [22]



Slika 11. Nasumično generirane točke [33]

Površina kvadrata duljine stranice 2 iznosi 4, a površina njemu upisanog kruga je π pa je vjerojatnost P da slučajno izabrana točka kvadrata pripada i krugu dana formulom

$$P = \frac{površina\ kruga}{površina\ kvadrata} = \frac{\pi}{4}.$$

S druge strane, ako je n broj slučajno izabranih točaka u kvadratu i m broj samo onih među njima koje pripadaju krugu, onda je

$$P = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}.$$

Stoga je

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}$$

odnosno

$$\pi \approx \frac{4m}{n}.$$

Posebnost ovog algoritma je u tome što nije potrebna posebna grafika ili simulacija za prikazivanje generiranih točaka. Jednostavno se generiraju nasumični (x, y) parovi te se provjerava za koje od tih parova vrijedi nejednadžba $x^2 + y^2 \leq 1$. Iz limesa je vidljivo da, kao i kod Buffonovog eksperimenta, veći broj ponavljanja osigurava i veću točnost.

Algoritam 06 Monte Carlo (*WOLFRAM MATHEMATICA 13.2*):

```
n=1000000;
m=0;
For[i=1,i<=n,i++,
	x=RandomReal[{-1,1}];
	y=RandomReal[{-1,1}];
	If[x^2+y^2<=1,m=m+1]]
Print[\[Pi]\[TildeTilde]SetPrecision[4*m/n,50]]
```

5.2. BAILEY – BORWEIN – PLOUFFE (BBP) ALGORITAM

Spigot algoritam za određivanje aproksimacije transcendentnog broja α je formula koja u nekoj bazi brojeva b može izračunati $k -$ tu znamenku od α bez potrebe računanja prvih $k - 1$ znamenaka. To je formula oblika:

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_r(n)}{Q_s(n)} b^{-n},$$

gdje je P_r polinom stupnja r, a Q_s polinom stupnja s.

1995. godine Simon Plouffe, David Bailey i Peter Borwein eksperimentalnim putem dolaze do formule:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right) 16^{-n}. \ [26]$$

Algoritam 07 BBP (*WOLFRAM MATHEMATICA 13.2*):

```
k=10;
S=0;
For[n=0,n<=k,n++,
    S=S+(4/(8 n+1)-2/(8 n+4)-1/(8 n+5)-1/(8 n+6)) 16^(-n)]
Print[\[Pi]\[TildeTilde]SetPrecision[S,100]]
```

Lako se vidi da je ta formula i spigot algoritam za određivanje aproksimacije broja π u bazi 16.

Slijedi BBP spigot algoritam za π u bazi 16 koji određuje znamenku na k – toj poziciji iza točke u heksadecimalnom zapisu broja π. Tražena znamenka je na prvoj poziciji iza točke u heksadecimalnom broju kojeg odredi program.

Algoritam 08 BBP spigot (*WOLFRAM MATHEMATICA 13.2*):

```
k=6;  d=10;
S1=0;  S2=0;  S3=0;  S4=0;
For[n=0,n<=k+d,n++,
    S1=S1+Mod[16^(k-1-n)/(8*n+1),1];
    S2=S2+Mod[16^(k-1-n)/(8*n+4),1];
    S3=S3+Mod[16^(k-1-n)/(8*n+5),1];
    S4=S4+Mod[16^(k-1-n)/(8*n+6),1]]
S=SetPrecision[Mod[4*S1-2*S2-S3-S4,1],20];
NumberForm[BaseForm[S,16],20]
```

Samo postojanje takve formule je gotovo nevjerojatno. Potrebno je više vremena za računanje što je znamenka „dalja“ $\left(O(k \log k)\right)$. Kod pretvaranja heksadecimalnih znamenaka u decimalne, najprije se trebaju izračunati sve prethodne znamenke.

Međutim, formula omogućuje računanje znamenki računalom, duboko unutar π, a bez značajnijeg korištenja memorije i s najosnovnijim tipom podataka dvostruke preciznosti. [18]

Na slici 12, svaki od 24 retka prikazuje jedno izvršavanje BBP spigot algoritma, pri čemu svaki put algoritam starta od neke druge decimale. Znamenke dobivene algoritmom označene su plavom i crvenom bojom. Plave znamenke predstavljaju točne, a crvene netočne znamenke. Sivom bojom označene su točne znamenke broja π koje nisu dobivene algoritmom.

Slika 12. Heksadecimalne znamenke dobivene BBP algoritmom

5.3. RAMANUJANOV ALGORITAM

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!\,(1103+26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$

Red izuzetno brzo konvergira.

Uzme li se samo prva parcijalna suma reda, tj. samo član za $n = 0$, dobiva se:

$$\pi \approx \frac{9801}{2\sqrt{2}\cdot 1103} \approx 3.14159273001.$$

Apsolutna vrijednost greške te aproksimacije iznosi 0.0000000764235. [19]

Dakle, u Ramanujanovoj formuli dovoljno je uzeti samo prvu parcijalnu sumu reda za točno računanje prvih 6 decimalnih mjesta broja π. Uzimanjem druge parcijalne sume dobiva se 15 decimalnih mjesta, treće 23, četvrte 31 decimalnih mjesta, itd.

Još se ne zna kako je Ramanujan u svojoj formuli došao do brojeva 9801 i 1103. [16]

Algoritam 09 Ramanujan (*WOLFRAM MATHEMATICA 13.2*):

```
k=10;
S=0;
For[n=0,n<=k,n++,
    S=S+(4*n)!*(1103+26390*n)/((n!)^4*396^(4*n))]
Print[\[Pi]\[TildeTilde]SetPrecision[9801/(2*Sqrt[2]*S),1000]]
```

5.4. CHUDNOVSKY ALGORITAM

Chudnovsky algoritam je brza metoda kojom se dolazi do decimala broja π. Temelji se na Ramanujanovoj formuli, a objavila su ga braća Chudnovsky po kojima i nosi ime. Uobičajena formula glasi:

$$\frac{1}{\pi} = 12\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(6n)!\,(545140134n + 13591409)}{(3n)!\,(n!)^3(640320)^{3n+\frac{3}{2}}}.$$

Formula se može pojednostavniti.

$$\frac{(640320)^{\frac{3}{2}}}{12\pi} = \frac{426880\sqrt{10005}}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(6n)!\,(545140134n + 13591409)}{(3n)!\,(n!)^3(-262537412640768000)^n} \quad [29]$$

Algoritam 10 Chudnovsky (*WOLFRAM MATHEMATICA 13.2*):

```
k=10;
S=0;
For[n=0,n<=k,n++,
    S=S+(6*n)!*(545140134*n+13591409)/((3*n)!*(n!)^3*(-262537412640768000)^n)]
Print[\[Pi]\[TildeTilde]SetPrecision[426880*Sqrt[10005]/S,1000]]
```

5.5. LEIBNIZOVA FORMULA

Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je alternirani red ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$a_{2n-1} \cdot a_{2n} \leq 0.$$

Prema Leibnizovom kriteriju, alternirani red

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konvergira ako niz $(|a_n|)$ pada i konvergira prema nuli.

Lako se provjeri da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

alternirani red koji zadovoljava Leibnizov kriterij pa taj red konvergira.

Vrijedi Leibnizova formula [31]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

Formula je jednostavna za računanje, no daje loše aproksimacije (jer red sporo konvergira) pa se stoga rijetko koristi.

Gregorijev (Maclaurinov) red funkcije arkus tangens,

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots,$$

konvergira za $x \in [-1,1]$. Leibnizova formula slijedi iz Gregorijeva reda za $x = 1$.

Algoritam 11 Leibniz (*WOLFRAM MATHEMATICA 13.2*):

```
k=100000;
S=0;
For[n=1,n<=k,n++,
    S=S+(-1)^(n-1)/(2*n-1)]
Print[\[Pi]\[TildeTilde]SetPrecision[4*S,100]]
```

5.6. GAUSSOV ALGORITAM

Punog imena Gauss – Legendreov algoritam, koristi se za računanje decimala broja π. Znakovit je po svojoj brzoj konvergenciji jer se nakon samo 25 ponavljanja (iteracija) generira $45\ 000\ 000$ točnih decimala broja π. Jedan od značajnijih nedostataka mu je velika potrošnja memorije računala, pa se ne koristi u utrci za rušenje rekorda u točnosti aproksimacije broja π.

Metoda se zasniva na kombinaciji individualnih stremljenja i radova Carla Friedricha Gaussa i Adrien-Marieja Legendrea s modernim algoritmima za množenje i kvadratne korijene. 1999. tim se algoritmom izračunalo $206\ 158\ 430\ 000$ decimala. [30]

Definiraju se nizovi (a_n), (b_n), (t_n), (p_n) na sljedeći način:

$$a_0 = 1, \qquad b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad t_0 = \frac{1}{4}, \qquad p_0 = 1$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

$$t_{n+1} = t_n - p_n(a_n - a_{n+1})^2$$

$$p_{n+1} = 2p_n.$$

Može se pokazati da vrijedi:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{(a_{n+1} + b_{n+1})^2}{4t_{n+1}},$$

odnosno

$$\pi \approx \frac{(a_{n+1} + b_{n+1})^2}{4t_{n+1}}.$$

Prve tri iteracije (do prve netočne znamenke) su:

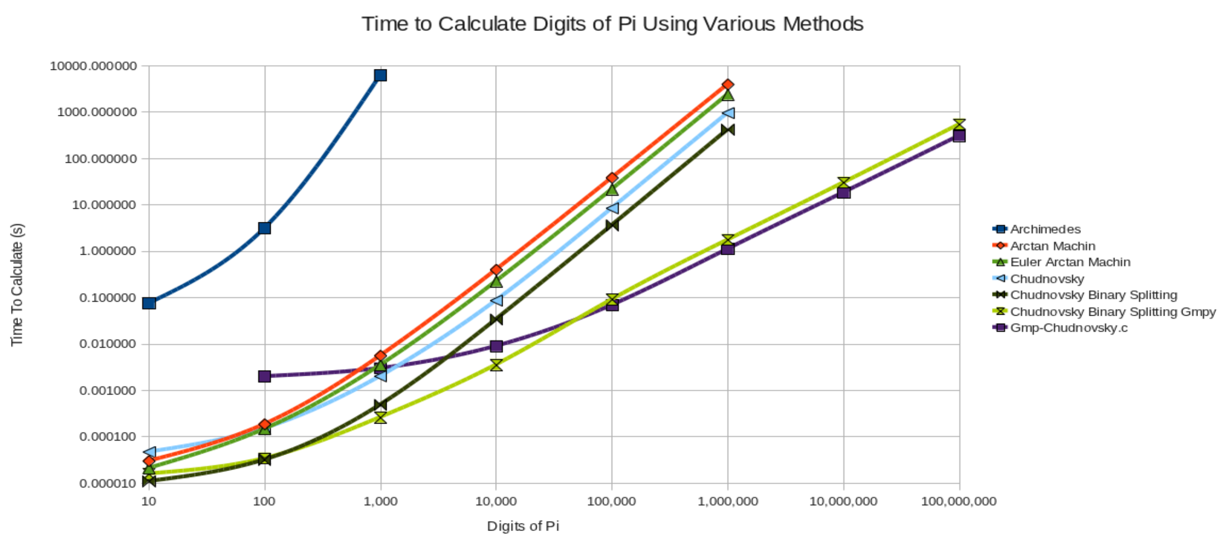
$3.140\dots$

$3.14159264\dots$

$3.14159265358979323 82$ ... [30]

Algoritam 12 Gauss (*WOLFRAM MATHEMATICA 13.2*):

```
n=10;  a=1;   b=1/Sqrt[2];   t=1/4;  p=1;
For[i=1,i<=n,i++,
        c=a;
        a=(a+b)/2;
        b=Sqrt[c*b];
        t=t-p*(c-a)^2;
        p=2*p]
Print[\[Pi]\[TildeTilde]SetPrecision[(a+b)^2/(4*t),100]]
```



Slika 13. Odnos trajanja računanja i broja znamenaka od π za različite metode [5]

6. IZRAČUN DECIMALA RAČUNALIMA

Kroz povijest, računala su korištena za izračunavanje točnih decimala broja π. Mehanička računala su bila prva računala s tom namjenom.

U 20. stoljeću, elektronička računala su se počela koristiti za računanje.
Prvo elektroničko računalo, koje je računalo aproksimacije broja π, bilo je računalo ENIAC iz 1946. godine, koje je 1949. točno izračunalo prvih 2037 znamenki tog broja.

S razvojem kompjutorske tehnologije, računala su postajala sve moćnija, što je omogućilo izračunavanje sve većeg broja točnih decimala. Tako je 1989. godine računalo CRAY X-MP izračunalo milijardu decimalnih mjesta. Današnja računala, specijalizirana za izračunavanje decimalnih mjesta broja π, mogu izračunati više milijardi decimalnih mjesta, a neke organizacije organiziraju natjecanja u računanju decimala.
S razvojem kompjutorske tehnologije, broj decimalnih mjesta broja π koja su računala mogla izračunati stalno se povećavao. Npr., 1999. godine, računalo T3E je izračunalo 2.7 bilijuna decimalnih mjesta, a 2010., računalo GIMPS je izračunalo 22 milijardi decimalnih mjesta. 2020., računalo Google Compute Engine izračunalo je $31{,}4$ trilijuna decimalnih mjesta broja π.

Izračunavanje velikog broja decimalnih mjesta broja π nema neposrednu praktičnu korist, ali pospješuje razvoj kompjutorskih algoritama i omogućuje testiranje performansi računala. Također, izračunavanjem decimalnih mjesta broja π, može se testirati kvaliteta generiranja slučajnih brojeva pomoću računala. [1]

Tablica 4. Računanje decimala broja π [28]

GODINA	TKO	BROJ ZNAMENKI	POTREBNO VRIJEME
1949.	Reitwiesner et al.; *ENIAC*	2 037	70 sati
1954.	Nicholson & Jeenel; *NORC*	3 093	13 minuta
1959.	Genuys; *IBM 704*	16 167	4.3 sata
1961.	Shanks & Wrench; *IBM 7090*	100 265	8.7 sati
1967.	Guilloud & Dichampt; *CDC 6600*	500 000	28 sati
1973.	Guilloud & Bouyer; *CDC 7600*	1 001 250	23.3 sata
1983.	Kanada, Yoshino & Tamura; *HITAC M-280H*	16 777 206	
1988.	Kanada & Tamura; *HITAC S-820/80*	201 326 551	5.95 sati
1989.	Kanada & Tamura; *HITAC S-820/80* braća Chudnovsky; *IBM 3090*	536 870 898 1 011 196 691	
1995.	Kanada & Takahashi; *HITAC S-3800/480*	6 442 450 000	116.63 sati
1996.	braća Chudnovsky	$>$ 8 000 000 000	
1997.	Kanada & Takahashi; *HITACHI SR2201*	51 539 600 000	29.05 sati
1999.	Kanada & Takahashi; *HITACHI SR8000/MPP*	206 158 430 000	37.35 sati
2002.	Kanada; *HITACHI SR8000/MPP*	1 241 100 000 000	600 sati
2009.	Bellards (PC)	2 699 999 990 000	131 dan
2014.	Van Ness (PC)	13 300 000 000 000	208 dana
2021.	DAVis tim *y-cruncher* v0.7.8.	62 831 853 071 796	108 dana
2022.	Iwao *y-cruncher* v0.7.8.	100 000 000 000 000	158 dana

7. ZANIMLJIVOSTI O BROJU π

- 14. ožujka poznat je i kao „Pi dan“, a mogao bi se slaviti i 5. ožujka jer tog dana prolazi 14.159% dana mjeseca ožujka (naime, ožujak ima 31 dan, a vrijedi $\frac{4.3893}{31} \approx 0.14159$). U američkom formatu datuma, posebni su trenuci dana 14. ožujka kada pokazatelji datuma i vremena pokazuju: $3.14\ 1\ 59$ (tj. kada je 1 sat i 59 minuta ujutro ili popodne). U čast Arhimedu i njegovoj aproksimaciji $\pi \approx 22/7$, drugi dan kojim se slavi broj π jest 22. srpnja, poznat kao „Dan procjene broja π“. Malen kuriozitet je da među prvih $1\ 254\ 543$ znamenki broja π svaka osoba može pronaći datum svog rođenja.
- Nekoć su se nova računala testirala određivanjem broja π na mnogo decimala. [12]
- 5. veljače 1897. godine stanoviti Edward Goodwin iz savezne države Indiane, predložio je izglasavanje zakona prema kojem će se njegove izračunate vrijednosti broja π koristiti u školskim udžbenicima, a za ostale će mu se plaćati tantijemi. Treba napomenuti da je riječ o četiri potpuno različite i netočne vrijednosti. Tragično, zakon je prošao donji dom, jednoglasno rezultatom 76:0, no nije prošao u gornjem domu.
- Michael Keith je poznatu pjesmu *Gavran* američkog pisca i pjesnika E.A. Poea izmijenio na mnemonički način tako da broj slova u svakoj riječi predstavlja znamenke broja π. Riječi s 10 slova predstavljaju nulu. Riječi s više od 10 slova predstavljaju dvije uzastopne znamenke. Cijela pjesma predstavlja prvih 740 znamenki. [13]
- Jedna od definicija broja π iskorištena je, makar kao navodni razlog, za rasistički napad na Edmunda Landaua 1934. godine. Landau je te godine definirao π na sljedeći način:

  $$\pi = 2x_0,$$

  gdje je x_0 najmanja pozitivna nultočka funkcije $f(x) = \cos x$.

  Nedugo nakon toga gubi poziciju na sveučilištu, uz obrazloženje da se njegove metode kose s njemačkim nacionalnim vrijednostima i osjećajima. [14]

8. ZAKLJUČAK

π, poznat i kao Ludolphov broj, transcendentan je broj koji predstavlja omjer između opsega i promjera (istog) kruga. Njegova znakovitost uočava se i kroz povijest, u mnogim zapisima koje su ostavili drevni mislioci, nastojeći doći do njegove što točnije vrijednosti. Poznato je njegovo korištenje u vrijeme gradnje Solomonovog hrama, o čemu svjedoči i pasus iz Biblije.

Grčki matematičar Arhimed poznat je po svojoj poligonalnoj aproksimaciji. Aproksimirao je π s $22/7$ što se i danas često uzima kao dovoljno dobra aproksimacija.
1706. William James prvi je za taj broj koristio oznaku koja se koristi i danas, no ona tek 1737. biva potvrđena nakon što ju je prihvatio i Leonhard Euler.

π se može definirati i kao omjer površine kruga i kvadrata njegova polumjera.
Najčešće se povezuje s geometrijom, no koristi se i u analizi, teoriji brojeva, vjerojatnosti, fizici, kozmologiji i sl.

Nekoliko je različitih algoritama kojima se dolazi do vrlo velikog broja točnih znamenaka, a najčešće korišten algoritam danas je Chudnovsky algoritam.

S obzirom na sve obrađeno i spomenuto u završnom radu, vidljivo je da je zaintrigiranost brojem π prisutna i danas. Taj broj i dalje golica umove zapadnog svijeta, već ionako opterećene velikim brojkama. Stoga se utrka, čiji je glavni cilj da se broj π izračuna sa što više točnih decimala, nastavlja.

LITERATURA

[1] Allen G. D., *π – A Brief History*, Texas A&M University College Station, TX 77843
URL: https://www.math.tamu.edu/~dallen/masters/alg_numtheory/pi.pdf
(pristupljeno 19.1.2023.)

[2] Brian Koberlein blog, *Cosmic pi*
URL: https://briankoberlein.com/blog/cosmic-pi (pristupljeno 18.1.2023.)

[3] Brojevi, *Broj PI*,
URL: http://www.mathos.unios.hr/~vcutek/Zadaca1/povijest.html
(pristupljeno 12.1.2023.)

[4] Brozović D., Čobanov M., *Broj π i vjerojatnost*
URL: http://mis.element.hr/fajli/560/09-04.pdf (pristupljeno 18.1.2023.)

[5] Craig-Wood.com, *Pi – Chudnovsky*
URL: https://www.craig-wood.com/nick/articles/pi-chudnovsky
(pristupljeno 7.1.2023.)

[6] Edward Pearce, *Gauss-Legendre algorithm*
URL: https://edwardmpearce.github.io/teaching/gauss-legendre_algorithm
(pristupljeno 12.1.2023.)

[7] Galton D., *The magic of Pi*, QJM: monthly journal of the Association of Physicians, 2009.
URL: https://academic.oup.com/qjmed/article/102/6/439/1527266
(pristupljeno 18.1.2023.)

[8] Geeks for geeks, *Estimating the value of Pi using Monte Carlo*
URL: https://www.geeksforgeeks.org/estimating-value-pi-using-monte-carlo
(pristupljeno 7.1.2023.)

[9] Gerovac M., *Brojevi e i π*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2011.
URL: http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/GER09.pdf
(pristupljeno 19.1.2023.)

[10] Gračan S., *S π na kavu!*
URL: https://mis.element.hr/list/2/broj/4/clanak/14/s-pi-na-kavu!
(pristupljeno 7.1.2023.)

[11] Gusić I., *Matematički rječnik*, Element, Zagreb, 2005.

[12] Katančić D., *Broj pi*, Sveučilište u Rijeci, Rijeka, 2019.
URL: https://www.unirepository.svkri.uniri.hr/islandora/object/mathri%3A132
(preuzeto 19.1.2023.)

[13] John D. Cook *Consulting, Pi and The Raven*
URL: https://www.johndcook.com/blog/2014/07/03/pi-and-the-raven
(pristupljeno 12.1.2023.)

[14] Live Journal, *Pi is political*
URL: https://markgritter.livejournal.com/743179.html (pristupljeno 10.2.2023.)

[15] Math's history, *A history of* π
URL: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Pi_through_the_ages
(pristupljeno 18.1.2023.)

[16] Medium, *Ramanujan's Magnificent Formula for Pi*
URL: https://www.cantorsparadise.com/ramanujans-magnificent-formula-for-pi-9801-1103-8-%CF%80-22fd7197d650 (pristupljeno 12.1.2023.)

[17] Observable HQ, *Computing* π *with the Bailey-Borwein-Plouffe Formula*
URL: https://observablehq.com/@tigerlily-he/bailey-borwein-plouffe-formula
(pristupljeno 12.1.2023.)

[18] Pezer M., Matejaš J., *Brojevi* π, e, i *kroz povijest*, Zagreb
URL: https://www.bib.irb.hr/858488 (pristupljeno 16.1.2023.)

[19] Planet Math, *Ramanujan's formula for pi*
URL: https://planetmath.org/ramanujansformulaforpi (pristupljeno 7.1.2023.)

[20] Polytechnic Institute of NYU, *Pi – what is it?*, New York, 2018.
URL: http://engineering.nyu.edu/gk12/amps-cbri/pdf/Carole_Pi_Activity_2-18-10.pdf
(pristupljeno 17.1.2023.)

[21] Quora, *Pi is the ratio of the circumference to the diameter*
URL: https://www.quora.com/Pi-is-the-ratio-of-the-circumference-to-the-diameter-what-does-this-mean (pristupljeno 10.2.2023.)

[22] Savić A., Bjelobaba G., Stefanović H., *Programska rešenja pri proceni broja Pi Monte Carlo metodama uz interaktivne animacije*, 17. Međunarodni simpozij INFOTEH – JAHORINA, 21. – 23. ožujka 2018.
URL: https://infoteh.etf.ues.rs.ba/zbornik/2018/radovi/RSS-3/RSS-3-7.pdf
(pristupljeno 18.1.2023.)

[23] Scribd, *Broj pi*
URL: https://www.scribd.com/document/333663690/Maturski-rad-Broj-Pi#
(pristupljeno 12.1.2023.)

[24] Wikibooks, *Calculus / Leibniz' formula for pi*
URL: https://en.wikibooks.org/wiki/Calculus/Leibniz%27_formula_for_pi
(pristupljeno 14.1.2023.)

[25] Wikipedia, *Arhimedova spirala*
URL: https://hr.wikipedia.org/wiki/Arhimedova_spirala (pristupljeno 3.1.2023.)

[26] Wikipedia, *Bailey-Borwein-Plouffe formula*
URL:https://en.wikipedia.org/wiki/Bailey%E2%80%93Borwein%E2%80%93Plouffe_formula (pristupljeno 3.1.2023.)

[27] Wikipedia, *Buffon's needle problem*
URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Buffon%27s_needle_problem
(pristupljeno 14.1.2023.)

[28] Wikipedia, *Chronology of computation of π*
URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Chronology_of_computation_of_%CF%80
(pristupljeno 12.1.2023.)

[29] Wikipedia, *Chudnovsky algorithm*
URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Chudnovsky_algorithm (pristupljeno 3.1.2023.)

[30] Wikipedia, *Gauss-Legendre algorithm*
URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Gauss%E2%80%93Legendre_algorithm
(pristupljeno 12.1.2023.)

[31] Wikipedia, *Leibniz formula for π*
URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Leibniz_formula_for_%CF%80
(pristupljeno 14.1.2023.)

[32] Wikipedia, *List of formulae involving π*
URL: https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_formulae_involving_%CF%80
(pristupljeno 14.1.2023.)

[33] Wikipedia, *Monte Carlo algorithm*
URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Monte_Carlo_algorithm (pristupljeno 14.1.2023.)

[34] Wikipedia, *Transcendentni broj*
URL: https://hr.wikipedia.org/wiki/Transcendentni_broj (pristupljeno 13.2.2023.)

POPIS SLIKA

POPIS TABLICA

POPIS ALGORITAMA (*WOLFRAM MATHEMATICA 13.2*)