Integrali u ekonomiji

Akrap, Filip

SVEUČILIŠTE U SPLITU

POMORSKI FAKULTET U SPLITU

FILIP AKRAP

INTEGRALI U EKONOMIJI

ZAVRŠNI RAD

SPLIT, 2021.

SVEUČILIŠTE U SPLITU

POMORSKI FAKULTET U SPLITU

STUDIJ: POMORSKA NAUTIKA

INTEGRALI U EKONOMIJI

ZAVRŠNI RAD

MENTOR: **STUDENT:**

Marina Laušić, predavač **Filip Akrap (MB:0171270178)**

SPLIT, 2021.

SAŽETAK

Od najranijih zapisa, prije postojanja ekonomije kao znanosti i matematičke današnje sofisticiranosti, razmjena dobara, usluga ili bilo čega od vrijednosti bila je vezana kvantifikacijom vrijednosti tih objekata razmjene. Kako se čovječanstvo razvijalo, tako su se razvijale matematika i ekonomija i veza među njima. Ekonomija je postajala sve ovisnija o matematičkim alatima koje joj pomažu kvantificirati, uspoređivati, predviđati te analizirati pojave koje se manifestiraju u progresivno kompleksnijem okruženju. Pojavom potrebe za dinamičkom analizom u ekonomiju ulazi infinitezimalni račun. Ovaj rad se fokusira na raščlambu primjene integralnog računa u raznim ekonomskim okolnostima te daje primjere upotrebe za pojedinačne primjene.

Ključne riječi: *ekonomija, matematika, primjena integralnog računa, dinamička analiza*

ABSTRACT

From the earliest scriptures, before economy existed as a science and mathematics as we know it today, the exchange of goods, services or anything of value was tied to the quantification of values of those objects of trade. As the humankind developed, so developed mathematics and economy and the relationship between them. Economy was becoming more dependent on the tools of mathematics that help it quantify, compare, foresee and analyze phenomena that manifest in a progressively complex environment. Infinitesimal calculus got introduced in economy as a result of the appearance of the need for dynamic analysis. This paper focuses on the breakdown of application of integration in a wide array of economic circumstances and provides examples of said application on particular uses.

Keywords: *economy, mathematics, application of integration, dynamical analysis*

SADRŽAJ

1. UVOD

Albert Einstein jednom je prilikom rekao da je znanost bez religije šepava, a religija bez znanosti slijepa. Ovaj rad najbolje se da opisati tako da metodom supstitucije zamijeni riječ znanost s riječju matematika, a riječ religija s riječju ekonomija. U današnjem svijetu svaki segment društva mora imati ekonomski smisao, a smisao ekonomiji daje matematika. Ovaj rad zapravo proučava kako ekonomija koristi matematiku, specifično integralni račun, da uvidi određene zakonitosti ekonomskih modela, odnosno da postane smislena.

Rad je pisan s ciljem da pregleda uporabu integralnog računa u ekonomskim modelima. Prolazi kroz ekonomske pojmove i varijable za lakše praćenje nastavka rada, podsjeća na integralni račun i pravila koja dolaze u sklopu istoga na jednostavnom primjeru prijeđenog puta u vremenu adaptiranom za temu rada. Naravno, ulazi i u srž teme pa tako nabraja i raščlanjuje primjene integralnog računa u ekonomiji, te daje realne primjere radi približavanja i lakšeg razumijevanja problema.

Drugo poglavlje bavit će se upoznavanjem ekonomije, njenih pojmova i varijabli koje su neophodne za daljnje proučavanje zakonitosti koje predočava koristeći matematiku. Tu je također uključen i kratak pregled povijesnog razvoja ekonomske misli te vodič kroz matematiku u ekonomiji u generalnom smislu.

Nakon toga, rad se vraća na matematiku s fokusom na integrale. On vodi kroz misao postanka integrala preko suma i stepenastih funkcija, te podsjeća na pravila integriranja kroz fundamentalni primjer prijeđenog puta u vremenu pri kretanju tijela promjenjivom brzinom, prilagođen kao prodane jedinice u vremenu zbog održavanja konzistentnosti teme kroz rad.

Predzadnje poglavlje opisuje primjene integralnog računa u dinamičkoj analizi ekonomskih modela, ključnih u razumijevanju svakodnevnih pojmova kao što su ponuda, potražnja i investicija. Analizirat će se moguća primjena namijenjena pojedincu da bolje razumije koncepte kupovanja, tržišne cijene i raspodijele bogatstva unutar države ili kakvog drugog sistema.

U petom, te ujedno i zadnjem, poglavlju sažeti su zaključci rada stečeni na temelju kolekcije informacija i argumenata koje rad sadrži i pregledava.

2. EKONOMIJA

Ekonomist i nobelovac Paul Samuelson definira ekonomiju kao znanost koja proučava kako se ljudi u društvu opredjeljuju, uz upotrebu novca ili bez njega, koristiti oskudna proizvodna sredstva, koja bi mogli koristiti u alternativne svrhe, da u određenom vremenu proizvedu razna dobra koja će raspodijeliti za potrebe sadašnje i buduće potrošnje na razne ljude i društvene skupine. Uz spoznaju da je čovjek biće gonjeno željama, može se izvući i drukčija definicija. Po nekima je ekonomija znanost proučavanja ljudskih napora u svrhu udovoljavanja tih želja, s obzirom na ono što stoji na raspolaganju. U svakom slučaju, definicije ekonomije su mnogobrojne ali svaka u sebi sadržava dva ključna pojma: oskudnost i izbor među mogućnostima.

2.1. POVIJESNI RAZVOJ EKONOMSKE MISLI

Početak smislene ekonomske priče nalazi se u staroj Grčkoj. Ksenofont, Sokratov učenik rodom iz Atene, u svom djelu "Oikonomikus" prvi put u povijesti uvodi termin ekonomija. On je smatrao da je kvaliteta grčkog društva u privredi, a pojavu trgovine i obrtništva proglasio je opasnom zbog budućnosti robovlasničkog poretka. U "Oikonomikusu" također se nalazi i čitav niz savjeta o valjanom upravljanju kućnim gospodarstvom, odnosu prema ženama i robovima i ostalo. Njegov sunarodnjak Platon se također bavio ekonomijom u svom opće poznatom djelu "Država". Aristotel je prvi ponudio objašnjenja na pojave koje istražuje i analizira, pa se on generalno smatra prvim analitičarom ekonomskog djelovanja.

U srednjem vijeku vladaju snažne religijske i kršćanske ideje pa se napredak ostvarivao vrlo sporo. Feudalni sustav nametnuo je spori napredak i krutu hijerarhijsku ljestvicu. Iz tog vremena, jedinim značajnim autorom smatra se Toma Akvinski zbog svog djela "Summa Theologica" koje predstavlja spoj katoličke vjere i Aristotelove racionalnosti, i ujedno uvodi pojam "Pravedne cijene" te korijene cijene uvjetovane potražnjom.

Od tada do danas se pojavio širok spektar ekonomskih teorija, od marksizma do suvremene neoliberalne ekonomske teorije, koje rješavaju davno postavljena pitanja na svojevrsne načine s ciljem napretka i svijetlije budućnosti [9], [1].

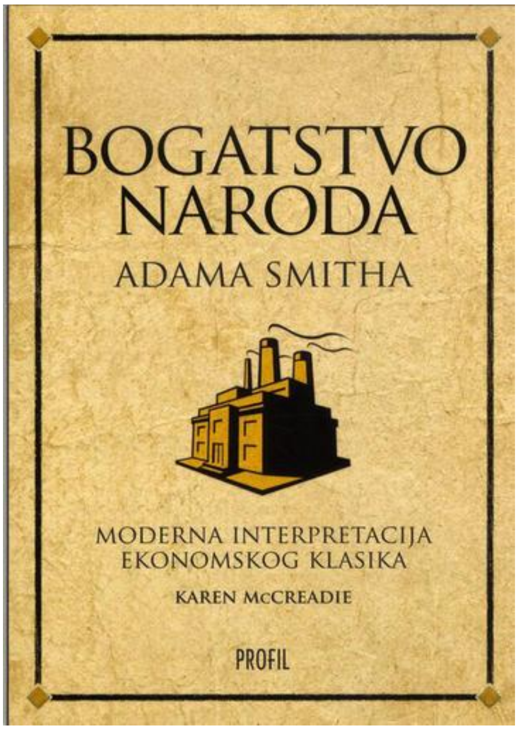
2.2. EKONOMIJA KAO ZNANOST

Gdje i kada je potekla velika rijeka današnje ekonomije? Izvori suvremene ekonomije datiraju u 1776. godinu kad je Adam Smith objavio klasično djelo istraživanja prirode i uzroka bogatstva naroda (An Inquiry into the Natures and Causes of the We1th of Nations). U toj knjizi, Smith je korektno izložio osnovna načela tržišne ekonomije. Uopće nije slučajnost da se ova knjiga pojavila u istoj godini kad i Deklaracija o neovisnosti. Pokret za političku slobodu od tiranije europskih monarhija pojavio se gotovo istodobno s pokušajima da se trgovina i industrija oslobode prljavih krpica feudalne aristokracije. Smith se s pravom može smatrati utemeljiteljem mikroekonomije, granom ekonomije koja se danas bavi ponašanjem pojedinačnih entiteta kao što su tržišta, poduzeća i kućanstva. U "Bogatstvu naroda" Smith je razmatrao kako se određuju pojedinačne cijene, kako se određuju cijene zemlje, rada i kapitala i istraživao krepkost i slabost tržišnog mehanizma.

Što je još važnije, on je identificirao jedinstveno efikasno svojstvo tržišta, takozvanu nevidljivu ruku koja dovodi do opće dobrobiti iz djelovanja pojedinca za vlastiti probitak. Sve su to još i danas važna pitanja. lako je od Smithova vremena proučavanje mikroekonomije sigurno znatno napredovalo, njega još jednako citiraju političari i ekonomisti.

Za razliku od mikroekonomije, makroekonomija je grana ekonomije koja se bavi sveukupnom mogućnošću ekonomije. Makroekonomija nije postojala u njezinom suvremenom obliku sve do 1936. godine. Bilo je to kad je John Maynard Keynes objavio prevratničku Opću teoriju zaposlenosti, kamate i novca (General Theory of Employment, Interest ands Money). U to su vrijeme Engleska i Sjedinjene Države još bile zapletene u Veliku krizu iz 1930-ih. Stopa nezaposlenosti dosegla je četvrtinu radne snage. Tragajući za izlazom, Keynes je naglašavao da ekonomije mogu pogrešno funkcionirati. U svojoj je knjizi razvio teoriju o tome koji su uzroci nezaposlenosti i ekonomskih obrata nadolje, kako središnje banke izlaze na kraj s novcem i kamatnjacima i zašto neke države napreduju dok druge zaostaju. Keynes je također dokazivao da vlade imaju važnu ulogu u izglađivanju poleta i padova poslovnih ciklusa. lako mnogi ekonomisti nisu dulje priznavali njegove specifične teorije i recepte, pitanja koja je uputio Keynes, još označavaju proučavanje današnje makroekonomije.

Te dvije rijeke — mikroekonomija i makroekonomija, međusobno se približavaju kako bi se spojile u suvremenu ekonomiku. Jedno je vrijeme granica između njih bila vrio oštra. U novije vrijeme, tijekovi su se spajali jer su ekonomisti primjenjivali oruđa mikroekonomije na takve teme kao što su nezaposlenost i inflacija. Ipak, da bi se došlo do potpunog razumijevanja ekonomije, još je nužno istražiti obje strane rijeke [10].



Slika 1: Naslovna strana kapitalnog djela Adama Smitha [13]

2.3. PROMINENTNI EKONOMSKI PRAVCI NOVIJEG DOBA

Klasični ekonomski pravac

Glavni predstavnici klasične škole su Adam Smith i David Ricardo. Ova škola naziva se još i ortodoksna liberalistička škola ili škola ekonomskog liberalizma. Traje od XVII. do XIX. stoljeća. Polazeći od empirijskih fenomena, cilj ovog pravca bio je otkrivanje unutrašnje međuovisnosti i zakonitosti funkcioniranja privrede kao cjeline. Pri tom, klasičari polaze od principa "nevidljive ruke tržišta". Ovaj princip je formulirao najznačajniji predstavnik klasične ekonomske škole Adam Smith. "Svaki pojedinac nastoji što je najviše moguće da uposli svoj kapital na dobrobit domaće proizvodnje; svaki pojedinac radi neminovno što je više moguće kako bi proizvod društva bio veći."

Opredjeljujući se za podršku domaćoj, a ne stranoj proizvodnji i usmjeravajući je tako da njen proizvod bude što veće vrijednosti, on ima u vidu samo svoj interes i vođen je nevidljivom rukom u ispunjavanju i onih ciljeva o kojima nije mislio." Ovoj teoriji zasnovanoj na proizvoljnim polaznim pretpostavkama daleko od stvarnosti, svojstvena je analogija kapitalizma, eklektičan i nepragmatičan karakter. Normalno da je sve prepušteno "nevidljivoj ruci" i tržištu koji će dovesti do optimalnog razvoja, bez ikakve potrebe miješanja države u privredni život.

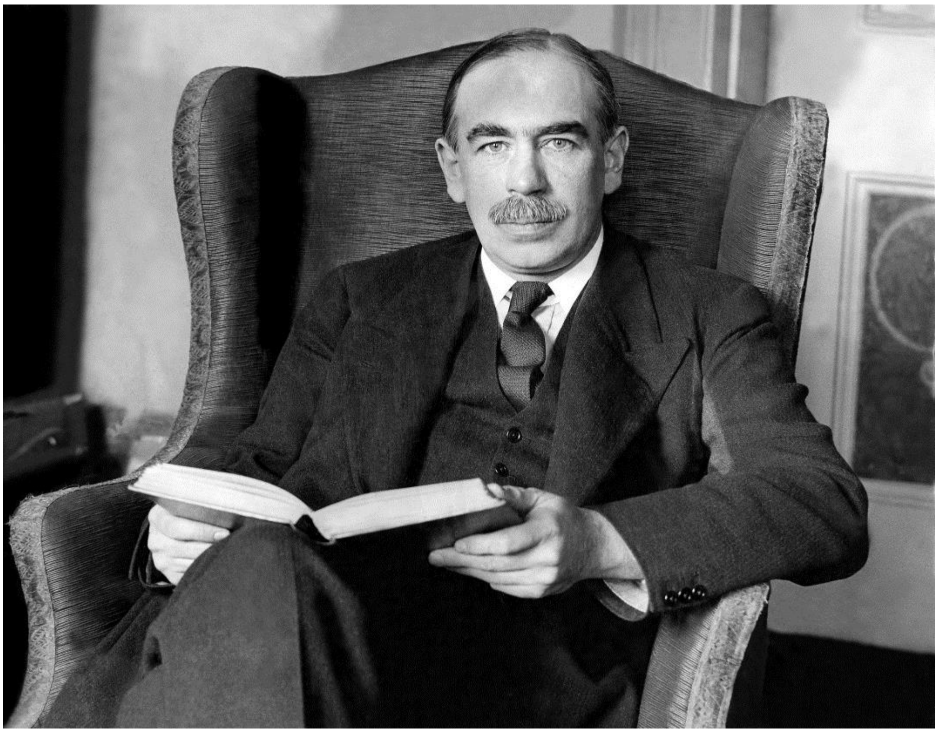
Klasična ekonomska teorija polazi od stava da privatna svojina u potpunosti i uvijek iskorištava svoje faktore proizvodnje. Zato predstavnici klasične ekonomske teorije apostrofiraju ekonomski značaj privatnog vlasništva, slobodnog tržišta, i privatnog poduzetništva. Miješanje države u ekonomsku aktivnost će, po njima, izazvati samo poremećaje, pad proizvodnje i rast nezaposlenosti. Klasična ekonomska teorija predstavlja osnovu na kojoj se kasnije nadovezuje pojava čitavog niza drugih pravaca u ekonomskoj teoriji [4].

Kejnezijanizam

Ključno stajalište kejnezijanske teorije i politike nalazi se u stavu da u kratkom roku proizvodnju i zaposlenost najvećim dijelom određuju faktori na strani potražnje. Također, po kejnezijanskim teoretičarima mjere monetarne i fiskalne politike se koriste za obuzdavanje inflacije i podržavanje privrednog rasta i zaposlenosti. Keynes je doveo u pitanje većinu stavova na kojima je počivala klasična ekonomska teorija. On postavlja pitanja društvene korisnosti privatne i javne štednje, dovodi u pitanje teoriju pune zaposlenosti radne snage i kapitala, kao i neograničenog liberalizma u trgovini i u privredi. Kada je u pitanju aktivna državna politika Keynes naročitu pažnju poklanja mjerama iz sljedećih područja:

- monetarne politike (novac, kamata, kredit, formiranje kapitala);
- porezne politike;
- politike javnih rashoda;
- politike budžetskog deficita i javnog duga.

"*Država treba navedenim mjerama, pojedinačno i kompleksno da djeluje na ponašanje privatnog kapitala (investiranje, zaposlenost, cijene), da bi se spriječio ulazak kapitalističke privrede u krizu ili depresiju sa padom nacionalnog dohotka i porastom nezaposlenosti*." [4]



Slika 2: John Maynard Keynes [14]

Monetaristički ekonomski pravac

Tijekom četrdesetih godina XX. stoljeća, u ekonomskoj teoriji se pojavljuje pravac pod nazivom monetarizam. Ova škola vezana je za ime američkog ekonomista Miltona Friedmana. Ona ističe odlučujući značaj promjena u priljevu novca u određivanju ravnotežne proizvodnje, odnosno ravnotežnog bruto domaćeg proizvoda i ravnotežnih cijena. Iako je nastao tijekom četrdesetih godina, monetarizam kao posebna ekonomska škola postaje veoma popularan tokom sedamdesetih godina XX. stoljeća. Monetaristički model polazi od shvaćanja da djelovanjem na promjene u investicijama i potražnji rezultira promjenama u ravnotežnom dohotku i ravnotežnim cijenama. Rast količine novca u opticaju djeluje na uvećanje potrošnje, osobne i investicijske, odnosno djeluje na uvećanje agregatne potražnje podižući nivo ravnotežnog dohotka. Monetaristi vjeruju da promjene u monetarnoj kao uostalom i u fiskalnoj politici imaju samo kratkoročne efekte na realni bruto domaći proizvod. Dugoročno, oni očekuju da veličina bruto proizvoda bude na nivou potencijalno mogućeg. Zbog toga, po njima, dugoročni se efekti promjena u monetarnoj sferi očituju jedino u djelovanju na promjene cijena [4].

2.4. EKONOMSKI POJMOVI

Ovaj rad pregledava primjenu integrala u ekonomiji, neophodno je predstaviti i osnovne pojmove te kompleksne znanosti koje će ovaj rad dotaknuti. Većinu takvih pojmova javnost susreće u svakodnevnom životu, bilo na vijestima, raspravama, ili filmovima, no generalno su krivo interpretirani. Važno je, stoga, definirati pojmove i pripadajuće varijable kako bi se olakšalo baratanje istima u kasnijim poglavljima ovoga rada.

Varijable u ekonomiji

Kako se rad bavi matematikom u ekonomiji, neizbježno je korištenje ekonomskih varijabli. Neke od najčešćih varijabli u ekonomiji, i ono što one predstavljaju, su:

- Cijena (P)
- Prihod (R)
- Trošak (C)
- Profit (π)
- Nacionalni dohodak, ili BDP (Y)
- Količina proizvodnje/broj jedinica proizvoda (q ili Q)
- Štednja (S)
- Investicije (I)

Očigledno je da su varijable u pravilu označavane prvim slovom engleske riječi onog pojma kojeg ta varijabla predstavlja s nekoliko iznimki koje potvrđuju takvo pravilo (Profit, BDP) [1].

Trošak

Trošak u ekonomiji predstavlja vrijednost utrošene imovine i realnog napora kako bi proizveo korisni učinak u obliku proizvoda ili usluge. Postoje dvije glavne skupine troškova: novčani odljev u nekom vremenu (prošlom, sadašnjem ili budućem) i oportunitetni troškovi. Ako se utrošena imovina i realni napor vrednuju po tržišnoj cijeni njihove nabave u novcu, onda je riječ o novčanom trošku proizvodnje određenoga proizvoda ili usluge, ili o njihovoj proizvodnoj cijeni. Ako se pregleda trošak fakultetskog obrazovanja jasno je da troškovi smještaja, knjiga i školarine predstavljaju trošak studija. Za mnoge studente novac ne predstavlja jedinu žrtvu. Oni također troše i svoje vrijeme kako bi stekli željeno obrazovanje. I dok to trošenje vremena ne dovodi do novčanog odljeva, ono izaziva oportunitetne troškove.

Oportunitetni trošak je korist koja bi mogla biti ostvarena korištenjem najpovoljnijeg izbora trošenja resursa. Primjerice, mnogi studenti odustaju od posla da bi mogli studirati. Prihod kojeg su se odrekli dio je troška studiranja. Taj prihod je korist koja bi mogla biti ostvarena od alternativnog korištenja oskudnih resursa [11].

Prihod

Prihod označava priljev novca ili druge imovine neke institucije (države, poduzeća ili dr. organizacije) zbog njezine gospodarske aktivnosti. Obično je riječ o priljevu zbog prodaje roba i usluga te realne ili financijske imovine. Priljevi od redovite gospodarske aktivnosti svrstavaju se u redovite prihode, a priljevi koji se ostvare od povremenih i neuobičajenih aktivnosti (poput prodaje dugotrajne imovine, otpisa obveza, inventurnih viškova, ostvarenih naknadnih popusta i sl.) u izvanredne. Zakon o računovodstvu te zakoni koji reguliraju pojedine institucije, kao i porezni zakoni, točno utvrđuju način računanja prihoda i rashoda [11].

Ponuda i potražnja

Ponuda i potražnja možda su najviše poznati i najčešće raspravljani stručni ekonomski pojmovi u laičkoj populaciji. No, ponuda i potražnja su zapravo međusobno ovisne, mjerljive, nevidljive sile koje omogućavaju i upravljaju djelovanje tržišnih gospodarstava.

Ponuda se definira kao količina dobara ili usluga koju su prodavatelji voljni prodati i isporučiti kupcima po određenim cijenama i drugim uvjetima prodaje u nekom razdoblju. Ponuđena dobra i usluge moraju imati određena svojstva kojima mogu zadovoljiti kupčeve potrebe, tj. uporabnu vrijednost koju kupac prepoznaje i na osnovi koje određuje intenzitet svoje želje da ih za određenu novčanu naknadu kupi. Ponuda robe i usluga ovisi o cijeni koju prodavatelj očekuje postići, o konkurenciji drugih ponuđača koji nude ista dobra i usluge ili njihove bliske zamjene te o njegovoj potrebi da ih što prije proda. Ponuda određene robe ili usluge u danom trenutku ovisi i o proizvedenoj količini ili mogućnosti njihove izravne proizvodnje te trenutačnoj mogućnosti njihova uvoza i izvoza.

Potražnja se pak definira kao novčana vrijednost koju su kupci spremni dati za određenu količinu dobara i usluga po određenim cijenama u nekom razdoblju. Potražnja ovisi o potrebama i ukusu potrošača, o cijeni tih dobara i usluga, kao i o cijeni drugih dobara i usluga koje mogu biti zamjena za njih (supstituti); također ovisi o kupovnoj moći kupca (dohotku, mogućnosti kupovanja na kredit), o kupčevoj informiranosti o cijenama i ponudi na tržištu, o djelovanju ekonomske promidžbe i slično [11].

3. MATEMATIČKA EKONOMIJIA

Način na koji su Aristotel i Platon razmišljali o ekonomiji kao o znanosti bio je jednodimenzionalan u smislu da su probleme gledali iz filozofske perspektive. U današnjem društvu konkurencije, optimizacije i maksimalne produktivnosti potrebno je sagledati probleme iz svih perspektiva i sa svim dostupnim alatima. Matematika je jedan od najjačih i najuniverzalnijih alata poznat čovječanstvu, pa tako i u ekonomiji predočava određene zakonitosti te daje odgovore na mnoštvo pitanja koja bi, bez tog alata, ostala neodgovorena.

Matematička ekonomija nije odvojena grana ekonomije kao što su to npr. javne financije ili internacionalna trgovina. Ona je pristup ekonomskoj analizi. Najveća razlika između matematičke ekonomije i eksplicitne ekonomije je u tome što se u prethodnoj pretpostavke i zaključci iznose u obliku matematičkih simbola umjesto riječima. K tomu se još i koristi matematičkim teoremima u procesu rezoniranja. Prednost matematičkog modela ima nekoliko razina koje uključuju matematički jezik koji je precizniji i koncizniji s cijelim bogatstvom matematičkih teorema na raspolaganju. Matematički jezik postao je dominantan u mnogim sferama ekonomije. Iako je ekonomija društvena znanost, razlika između društvenog i znanstvenog aspekta ove znanosti je sve manja i manja.

Izraz matematička ekonomija se često miješa sa ekonometrijom. Ovo nije točna pretpostavka. Ekonometrija se pretežno bavi mjerenjem ekonomskih podataka, dok matematička ekonomija daje alate za manipulaciju istim [7].

Postotni račun u ekonomiji

Decimalni prikaz je samo drugačiji način prikazivanja razlomaka. U matematici se decimalni format pretežno koristi za stvari koje se u svakodnevnom životu izražavaju kao postotci. Na primjer, kamatne stope se pretežno prikazuju u postotcima, kao i popusti na rasprodajama i akcijama. Dakle, ako je zaposlenik državi dužan dati 43% poreza na svoju plaću koja iznosi 2345 eura, kolika je njegova neto plaća? Pretvaranje postotaka u decimale se izvodi pri radu s kamatnim stopama [7].

Slika 3: Postotni račun kod rasprodaje [15]

Matrični račun u ekonomiji

Ekonomski problemi posuđuju razna oružja iz matematičke oružarnice, pa se tako, primjerice, matrični račun i sistem linearnih algebarskih jednadžbi koristi pri rješidbi linearnih modela tržišne ravnoteže, modela nacionalnog dohotka i međusektorskih modela [3].

3.1. LINEARNA ALGEBARSKA JEDNADŽBA U EKONOMIJI

Statični model ravnoteže

U statičnom modelu, standardni problem je pronalaženje skupa vrijednosti endogenih varijabli koji bi zadovoljavao uvijete ravnoteže našeg modela. Ovo se ilustrira na ravnotežno – tržišnom modelu, tj. modelu određivanja cijene na izoliranom tržištu. Kako se promatra samo jedna vrsta robe, dovoljno je imati samo tri varijable:

• cijenu robe P

• količina potražnje, tj. prodane robe Q_d

• količina ponude Q_s

Standardna pretpostavka je da se ravnoteža na tržištu uspostavlja ako i samo ako nema viška potražnje, tj

. $Q_d - Q_s = 0 = Q_d = Q_s$. No ovo odmah postavlja pitanje kako se određuje Q_d i Q_s?. Za Q_d pretpostavka je da je linearna padajuća funkcija cijene P (tj. što je veća cijena, to je manja potražnja). Za Q_s pretpostavka je da je linearna rastuća funkcija cijene P (tj. što je veća cijena, to je veća ponuda). Također postoji i pretpostavka da nema ponude ukoliko cijena ne dosegne određeni minimalni nivo. Sve u svemu, model će sadržati jedan uvjet ravnoteže plus dva uvjeta ponašanja koji upravljaju potražnjom i ponudom respektivno [7].

Model nacionalnog dohotka

Iako se do sada u radu priča o ravnoteži ograničavala na tržišne modele, naravno da ona ima primjene i u drugim granama ekonomije. Kao jednostavan primjer, može se promatrati Keynesov model nacionalnog dohotka

- $Y = C + I_0 + G_0$
- $C = a + bY \ (a > 0, 0 < b < 1)$ (1)

Ovdje Y i C predstavljaju endogene varijable nacionalnog dohotka i potrošnje respektivno, dok I_0 i G_0 predstavljaju investiciju i potrošnju vlade.

Također su unaprijed poznate veličine a i b, utoliko da a predstavlja autonomnu potrošnju, dok je b granična sklonost potrošnji. Prva jednadžba je uvjet ravnoteže (nacionalni dohodak je jednak nacionalnoj potrošnji). Druga jednadžba je jednadžba ponašanja. Cramerovo pravilo odmah dovodi do rješenja

$$y = \frac{I_0 + G_0 + a}{1-b}, \qquad c = \frac{a + b(I_0 + G_0)}{1-b}. \tag{2}$$

Input-output analiza

U svojoj statičkoj verziji, input-output analiza Prof. Leontiefa bavi se pitanjem nivoa outputa koji bi svaka od *n* različitih industrija trebala proizvoditi, tako da bi to bilo dovoljno da se zadovolji ukupna potražnja za tim proizvodom. Output mnogih industrija (kao što je na primjer čelik) je input mnogih drugih industrija, stoga bi ispravan nivo proizvodnje čelika ovisio o input potrebama svih industrija gdje se čelik koristi. S druge strane outputi raznih drugih industrija će se koristiti kao inputi u industriji čelika i posljedično će nivoi outputa drugih proizvoda ovisiti, barem djelomično, od potreba industrije čelika. Stoga je očito da je input-output analiza od velikog značaja prilikom planiranja proizvodnje, kao na primjer prilikom planiranja ekonomskog razvoja neke zemlje ili programa narodne obrane.

Povijesno gledano, potreba za ovom vrstom modeliranja (odnosno analize) pojavila se ubrzo nakon izbijanja Prvog svjetskog rata kada je američki predsjednik F. D. Roosevelt izdao nalog za proizvodnju 50 000 aviona, što je zahtijevalo istovremeno i veliku proizvodnju aluminija u državi. Tako velika proizvodnja aluminija zahtijevala je masivne sabirnice kroz koje bakar provodi struju i nepredviđena nestašica bakra prijetila je cijelom rasporedu proizvodnje. Vlada je za savladavanje te krize zaključila da treba zamijetiti bakar srebrom. Ali odakle pribaviti toliku količinu srebra? Pozajmili su ga iz Fort Kuzma i 50 000 aviona je proizvedeno, a krajnji rezultat njihove upotrebe u ratu je mnogo značajniji. Ovo pokazuje da se nekada, a posebno u ratnim okolnostima, ekonomija jedne države može uspješno planirati vodeći računa o proizvodnji svakog outputa iz pojedinog sektora (kao što je proizvodnja aviona zahtijevala određene količine aluminija, proizvodnja aluminija zahtijevala proizvodnju bakra i struje i tako dalje). Gotovo svaki od proizvoda bilo kojeg sektora se koristi za uspješnu reprodukciju u ostalim sektorima i eventualno u svom sektoru.

Međutim, obično se osim ovih sektora u međusektorski model uključuje i jedan tzv. "otvoreni sektor" (npr. domaćinstva) koji egzogeno predstavlja finalnu potražnju za proizvodom svakog pojedinog sektora i koja nije utrošak ni za jedan sektor. U tom se slučaju model naziva otvorenim.

3.2. PRIMJENA FUNKCIJA U EKONOMIJI

Pojedine ekonomske veličine mogu biti u međusobnoj ovisnosti, tj promjena jedne od njih može prouzročiti promjenu jedne ili više drugih. Dakle, postavljanje poveznica između ekonomskih elemenata nije lak zadatak, tim više ako vrijedi da promjena jednog elementa uzrokuje promjenu drugoga, ali ne i obratno, stoga treba obratiti poseban oprez kod izvođenja inverznih oblika funkcija jer, iako je matematički opravdano, s ekonomskog aspekta nema nikakvog smisla i može dovesti do pogrešnih zaključaka. Takve funkcije pronalazi se u gonetanju funkcija ponude, funkcija potražnje te funkcija prihoda i dobiti [3].

Funkcija potražnje

Neka se na nekom tržištu, između ostalog, nudi i traži jedan proizvod A i neka je Q ukupna količina tog proizvoda koju potražuju potrošači na tom tržištu. Ukoliko je pretpostavka da su zadovoljeni neki bitni kriteriji tržišta (nepromjenjivost ukupnog broja potrošača, ukusa svih potrošača, prihoda svakog potrošača i cijena svih ostalih proizvoda na tom tržištu), količina potražnje proizvoda A ovisit će samo o njegovoj tržišnoj cijeni. Ako je cijena proizvoda A označna sa p, jasno je da će se s promjenom cijene p mijenjati i ukupna potražnja Q proizvoda A, tj. potražnja Q je funkcija cijene p, ali i obrnuto. Ako se mijenja ukupna količina potražnje proizvoda A, doći će i do promjene njegove cijene p. Zato ovdje ima smisla govoriti o inverznoj funkciji gornje funkcije i u ekonomskom smislu [3].

Funkcija ponude

Pod pojmom ponude podrazumijeva se količina određenog proizvoda A koju proizvođač nudi na nekom tržištu. U normalnim okolnostima ponuda će rasti s povećanjem cijene proizvoda. Zbog toga će funkcija ponude uvijek biti rastuća i definirana samo za nenegativnu promjenjivu cijenu proizvoda p. Također, vrlo često se dešava da se izvjestan broj ponuđača suzdržava od prodaje proizvedene robe ako je cijena niska i uglavnom čeka povoljniji trenutak, tj. kad cijena dostigne onaj nivo za koji im se isplati prodavati robu. Osim toga, ako je tržišna cijena proizvoda niska, izvjestan broj proizvođača neće se odlučiti proizvoditi taj proizvod, jer bi pod tim uvjetima eventualni troškovi doveli do gubitka. Tako će ponuda biti jednaka 0 za sve pozitivne vrijednosti cijene p koje su manje od te kritične vrijednosti [3].

Funkcija troškova

Poznato je i ustanovljeno da su troškovi u jednoj proizvodnoj firmi novčani izraz za utrošene pojedine elemente procesa proizvodnje, kao što su sredstva za rad, predmet rada ili radna snaga. Zbog toga se oni mogu klasificirati prema različitim kriterijima, a za ovaj rad, posebno je zanimljiva klasifikacija prema reagiranju na obujam proizvodnje. Po toj klasifikaciji troškovi se dijele na varijabilne i fiksne. Varijabilni, odnosno promjenljivi, troškovi su oni troškovi koji ovise o obujmu proizvodnje, tj. mijenjaju se u skladu s povećanjem ili smanjenjem volumena proizvodnje, a također su uvjetovani i stupnjem iskorištenosti kapaciteta. U varijabilne troškove se ubrajaju troškovi materijala za izradu (sirovine), troškovi korištenja energije, troškovi rada i sl.

S druge strane, fiksni troškovi u ukupnom iznosu se ne mijenjaju, tj. fiksni su, za svaki dati volumen proizvodnje. U takve troškove spadaju, na primjer, troškovi osiguranja, troškovi zakupa, troškovi amortizacije, troškovi kamata na kredite i sl. Bitna karakteristika fiksnih troškova je da oni postoje neovisno o tome da li se proces proizvodnje izvodi ili ne.

Ukupni troškovi predstavljaju zbroj varijabilnih i fiksnih troškova. Uvedene su oznake: T - za ukupne troškove, VT – za varijabilne troškove, FT - za fiksne troškove, pa ukupni troškovi iznose $T = VT + FT$.

Ako se sa Q označi obujam proizvodnje, tj. količina proizvoda, jasno je da je veličina varijabilnih troškova u funkcionalnoj ovisnosti o količini proizvodnje Q, tj. $VT(Q)$, pa je i funkcija ukupnih troškova, također, u funkcionalnoj ovisnosti o obujmu proizvodnje Q, tj. $T(Q)$.

Funkcija prihoda i dobiti

Ukupni prihod predstavlja produkt količine određene robe prodane na tržištu u određenom vremenskom razdoblju i cijene po kojoj je to roba prodana. Poznato je da je količina prodane robe na tržištu ustvari funkcija potražnje za tom robom. Ranije je predstavljeno da se potražnja izražava kao funkcija cijene proizvoda, tj. $Q = Q(p)$, pa je u tom slučaju ukupni prihod P funkcija cijene p označen s $P(p)$.

Međutim, i cijena robe se može promatrati kao funkcija potražnje, tj. $p = p(Q)$ i tada je i ukupni prihod funkcija potražnje. Pri tome su $p(Q)$ i $Q(p)$ međusobno inverzne funkcije.

4. INTEGRALI

Sir Isaac Newton u povijesti je zapisan kao genij miljama ispred ljudske rase i svog vremena. Na temeljima misli ljudi od znanosti koji su bili prije njega, razvio je zakonitosti i otkrića u širokom spektru znanosti, uključujući i tri Newtonova zakona gibanja. U svojim istraživanjima pronašao je i pojam brzine koji označava iznos promjene položaja. Pitanje koje je uslijedilo bavilo se računanjem ukupne udaljenosti koju u danom vremenu prijeđe čestica čija se brzina neprestano mijenja. Rješenjem tog problema zapravo je otkrio ključ za cijeli diferencijalni račun.

Promatrajući dvije vrste problema odjednom, Newton je uočio da su diferencijalni i integralni račun zapravo dvije strane jednog novčića. Ta uska i recipročna veza danas se naziva fundamentalnim teoremom infinitezimalnog računa, takozvana Newton-Leibnizova formula za određeni integral.

4.1. DEFINICIJA ODREĐENOG I NEODREĐENOG INTEGRALA

Suma

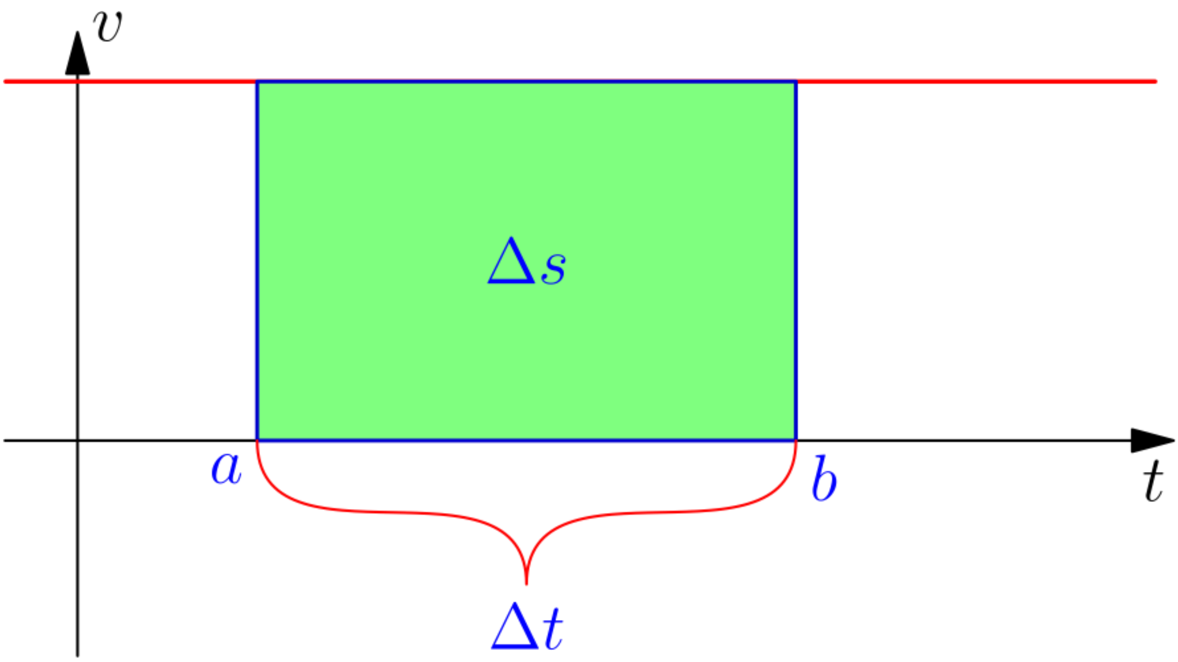
Sumu *n* zadanih brojeva $a_{1,} a_2$, …, a_n koja se uobičajeno piše u obliku a_1 + a_2 + … a_n može se zapisati u kraćem obliku kao $\sum_{i=1}^{n} a_i$.

Osnovna svojstva sume:

- $\sum_{i=m}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$
- $\sum_{i=m}^{n} ca_i = c\sum_{i=m}^{n} a_i$
- Ako je $m \leq p$ te $p + 1 \leq n$ tada je $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{p} a_i + \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=p+1}^{n} a_i$
- Ako je $a_1 \leq b_i$ za sve $m \leq i \leq n$ tada je $\sum_{i=m}^{n} a_i \leq \sum_{i=m}^{n} b_i$ (3)

Kao uvod u osnovnu zamisao integracije prezentira se primjer brzine i prevaljenog puta kod pravocrtnog gibanja.

Ako je pretpostavka da se određeno tijelo kreće u jednoliko u danoj jedinici vremena, kao što je opisano funkcijom $n = F(t)$, gdje s predstavlja prevaljeni put, dok t predstavlja proteklo vrijeme mjereno u sekundama. Ako je definirana ili izmjerena konstantna brzina kojom se to tijelo kreće tijekom vremenskog intervala Δt onda se $F(t)$ definira kao $s = v\Delta t$ kao na slici 1.



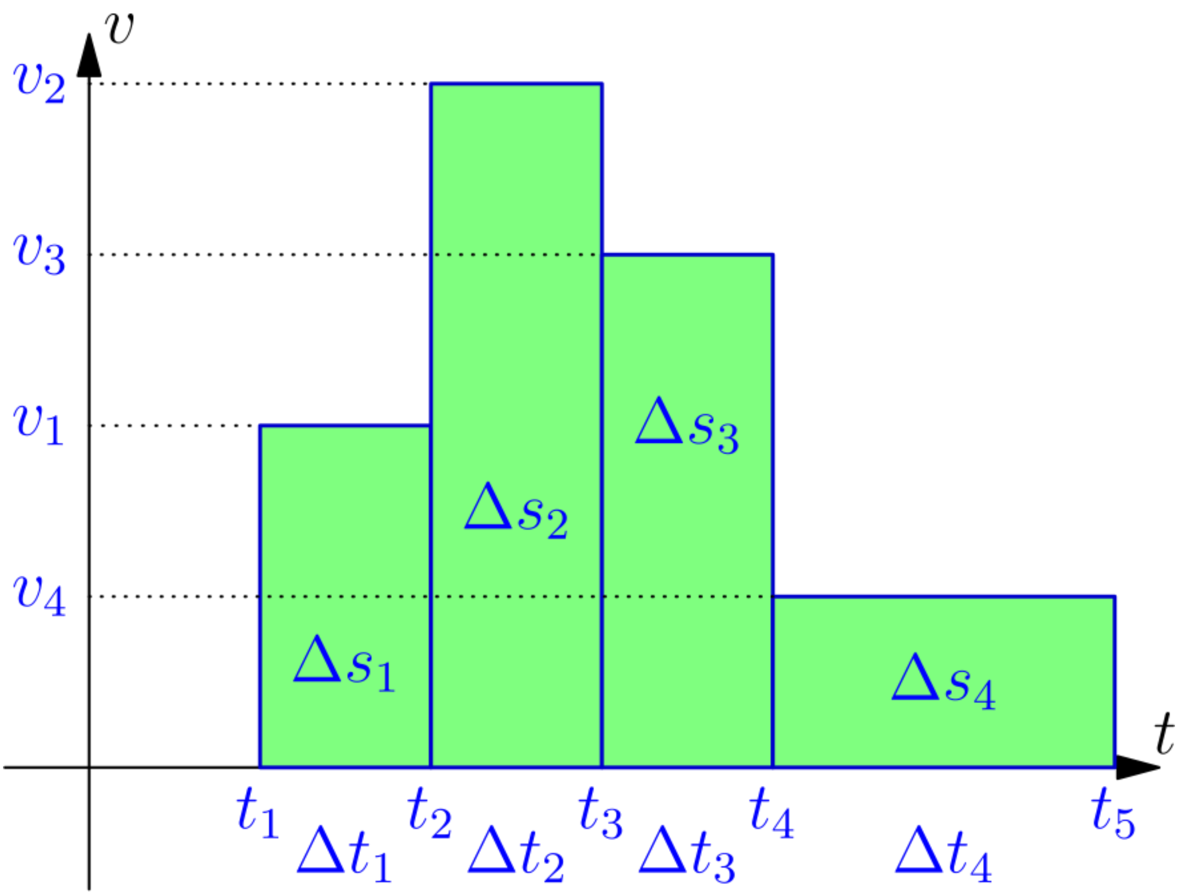
Slika 4: Prijeđeni put u vremenu [12]

Takvo rješenje vrijedi u generaliziranim i idealiziranim slučajevima, što je rijetka pojava u prirodi, ali naslućuje i uvodi u iduće korake. Ako se tijelo kreće različitim, no ipak konstantnim, brzinama u različitim periodima vremena (kroz vremenski period Δt_1 se kreće konstantnom brzinom v_1, kroz vremenski period Δt_2 se kreće konstantnom brzinom v_2, te konačno kroz vremenski period Δt_n konstantnom brzinom v_n) tada je konačni zbroj prijeđenog puta definiran kroz sumu:

$$\Delta s = \sum_{i=1}^{n} v_i \Delta t_i \tag{4}$$

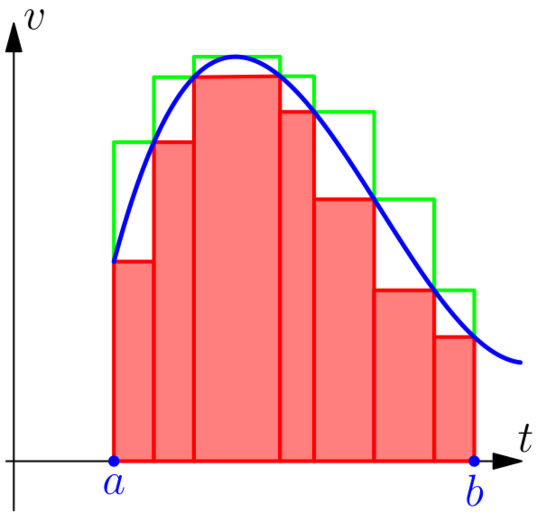
Iz slike 2 vidljiv je zaključak jednakosti ukupnog puta $\Delta s = \sum_{i=1}^{4} V_i \Delta t_i$ i zelene površine ispod grafa funkcije brzine $s = f(t)$. Također slijedi da se približavanjem realnosti slučaj dodatno komplicira kontinuiranom promjenom brzine u datom periodu vremena. Uz pretpostavku da je $v = f(t)$ neprekinuta funkcija definirana na vremenskom intervalu $a \leq t \leq b$ podijeljenom na n točaka kojima su dodijeljene konstante $d(i)$ i $g(i)$ takve da vrijedi:

$$d_i \leq f(t) \leq g_i \; za \; \in < t_{i-1}, t_i > \tag{5}$$



Slika 5: Ukupan prijeđeni put [12]

Iz poznate činjenice, da tijela koja se brže gibaju ujedno prevaljuju i veće puteve proizlazi zaključak da će tijelo tijekom perioda $< t_{i-1}, ti >$ prijeći veći put od $d_i \Delta t_i$, ali jednako tako i manje od $g_i \Delta t_i$. Dakle, ukupan prijeđeni put od trenutka a do trenutka b ujedno je i veći od $\sum_{i=1}^{n} d_i \Delta t_i$ i manji od $\sum_{i=1}^{n} g_i \Delta t_i$, kao što je prikazano na grafu na slici 3.



Slika 6: Donja i gornja procjena [12]

Površina crvenoga područja donja je procjena $\sum_{i=1}^{n} d_i \Delta t_i$, dok je površina zelenoga područja gornja procjena, tj. $\sum_{i=1}^{n} g_i \Delta t_i$, prijeđenog puta toga istoga tijela. Razlika između zelene i crvene površine predstavlja okvir u kojem se kreću greške gornje i donje procjene. Smanjivanjem diobenih intervala postiže se smanjenje razlike između gornje i donje konstante, tj. kako razlike postaju sve manje, tako gornje i donje procjene postaju sve točnije.

Područje ispod grafa funkcije f na intervalu $[a, b]$ definira se kao područje omeđeno grafom $y = f(x)$, osi x i pravcima $x = a$ i $x = b$. Ako f ne poprima negativne vrijednosti na $[a, b]$, tj. da je $f(x) \geq 0$ za svaki $x \in [a, b]$, onda se takva funkcija naziva nenegativnom funkcijom.

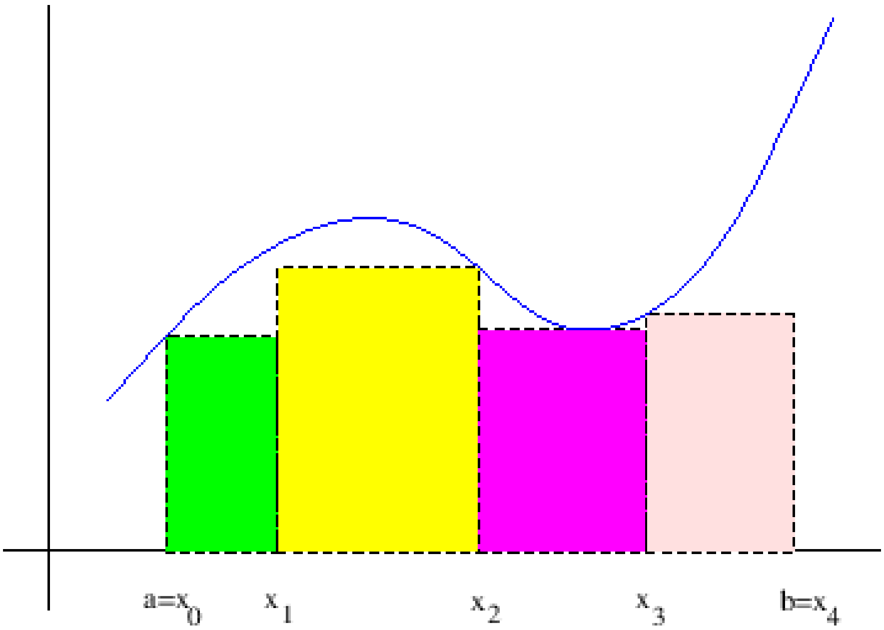
Do sada je predstavljeno da je vrlo jednostavno izračunati površinu ispod grafa funkcije koja poprima konstantne vrijednosti na podintervalima intervala $[a, b]$. Za idući problem za početak potrebno je definirati tzv. stepenaste funkcije.

Funkcija g definirana na $[a, b]$ je stepenasta funkcija ako postoji razdioba intervala $[a, b]$ točkama $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ (particija intervala [a,b]) takva da je funkcija g konstantna na svakom od intervala $< x_0, x_1 >, \dots, < x_{n-1}, x_n >$.

Područje ispod grafa nenegativne stepenaste funkcije sastoji se od konačno mnogo pravokutnika čija se površina može izraziti kao suma površina tih pravokutnika. Označivanjem konstantne vrijednosti stepenaste funkcije g na intervalu $< x_{i-1}, x_i >$ s g_i, dobije se suma koja mjeri površinu ispod stepenastoga grafa:

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(x_i - x_{i-1}) \quad (6)$$

Nadalje valja opisati postupak točnog izračunavanja tražene površine ispod grafa funkcije f, koja nije stepenasta ali se može aproksimirati stepenastim funkcijama s gornje i donje strane. Neka je f nenegativna funkcija definirana na $[a, b]$. D je donja suma za f na $[a, b]$ ako postoji nenegativna stepenasta funckija d na $[a, b]$ takva da za $\forall x \in [a, b]$ vrijedi $d(x) \leq f(x)$ i $D = \sum_{i=1}^{n} d_i \Delta x_i$.

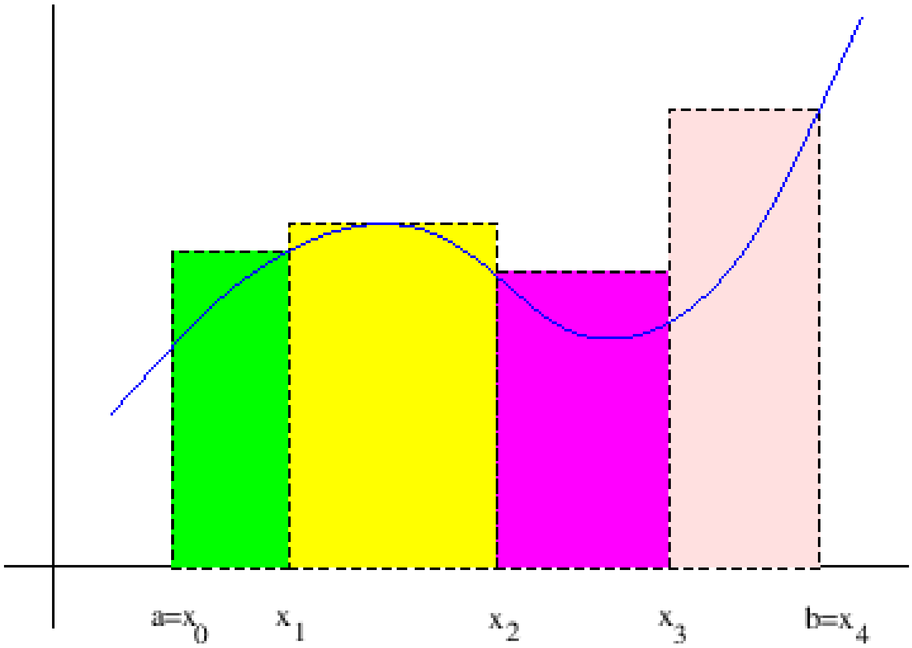


Slika 7: Donja integralna suma [19]

G je gornja suma za f na $[a, b]$ ako postoji nenegativna stepenasta funkcija

g na $[a, b]$ takva da za $\forall\, x \in [a, b]$ vrijedi:

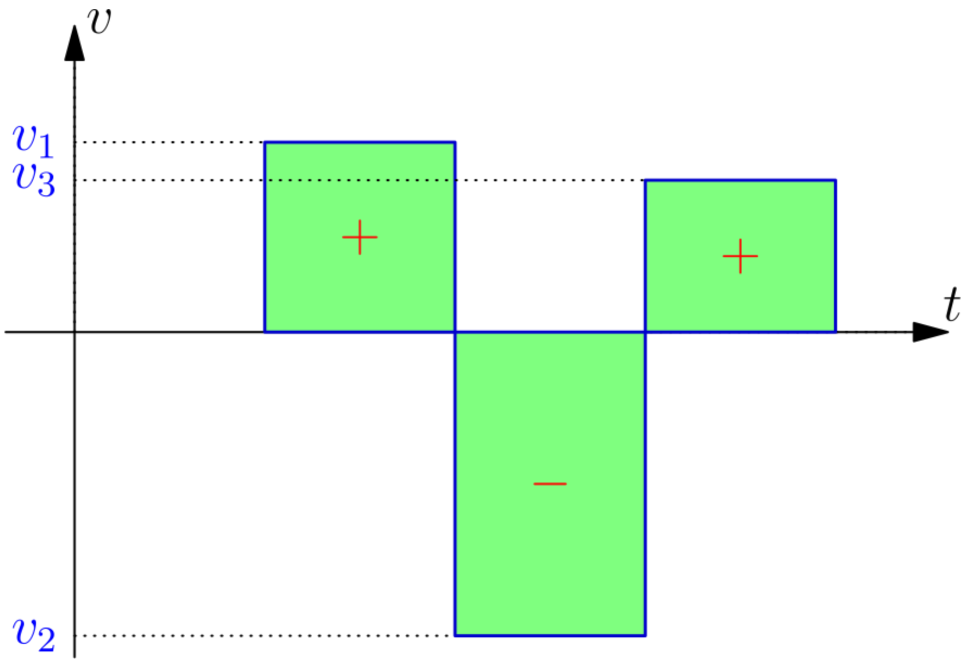
$$g(x) \geq f(x) \text{ i } G = \sum_{j=1}^{m} g_j \Delta x_j \quad (7)$$



Slika 8: Gornja integralna suma [19]

Očito je da je površina P, ispod grafa od f na $[a, b]$ veća od svake donje sume te manja od svake gornje sume za f na $[a, b]$. Odnosno, upotrebom particija s dovoljno malim podintervalima dolazi se do mogućnosti odabiranja stepenastih funkcija koje se nalaze iznad i ispod f, čije će se gornje i donje sume razlikovati po volji malo.

U općim slučajevima dolazi i do pojave negativnih funkcija, te funkcija koje su dijelom pozitivne, a dijelom negativne. U takvim slučajevima rješenje je relativna površina, odnosno razlika pozitivnih i negativnih površina. Primjer takve funkcije predstavljen je na slici 6 [12].



Slika 9: Relativna površina [12]

4.1.1. Definicija određenog integrala

Neka je f funkcija definirana na intervalu $[a, b]$. Ako na $[a, b]$ postoje gornje i donje sume za f koji se po volji malo razlikuju, onda postoji i jedan jedini broj I koji je veći od svih donjih suma D i manji od svih gornjih suma G, $D \leq I \leq G$. Taj broj zove se integral funkcije f na intervalu i on je jednak relativnoj površini ispod grafa od f na $[a, b]$ te se označava s:

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{8}$$

Znak $\int$ nazvan je znakom integracije, a konstante a i b granicama integracije, a f podintegralnom funkcijom. Ako je f integrabilna funkcija na intervalu $[a, b]$ tada vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \Delta x_i \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \sum_{j=1}^{m} g_j \Delta x_j \tag{9}$$

To vrijedi za sve stepenaste funkcije d i g, tako da je $d(x) \leq f(x) \leq g(x)$ za $x \in [a, b]$, i $\int_a^b f(x)\,dx$ jedini je broj koji ima to svojstvo.

Integral je definiran pomoću suma, tako da je i sama notacija za integral izvedena iz notacije za sumu. (Neke teorije kažu da je slovo S kao suma, a neke da je Σ kao znak sumacije, pretvoren u izduženi ∫, Δx_i je pretvoren u dx, a granice sumacije 1 i n pretvorene su u granice integracije a i b) [12].

4.1.2. Definicija neodređenog integrala

Za definiciju neodređenog integrala potrebno je prvo pregledati pojam antiderivacije. Antiderivacija funkcije $f(x)$ je takva funkcija $F(x)$ za koju vrijedi sljedeće:

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \tag{10}$$

Po pravilima deriviranja također vrijedi da je za bilo koju konstantu C tvrdnja $\frac{d}{dx}(F(x) + C) = f(x)$ istinita. To znači da je osim $F(x)$ i svaka funkcija $F(x) + C$ također antiderivacija od $f(x)$. Ako je $F(x)$ jedna od antiderivacija funkcije $f(x)$, tada je i funkcija $F(x) + C$ antiderivacija od $f(x)$ za svaku konstantu C. To su ujedno i sve antiderivacije od $f(x)$. Antiderivacija funkcije f često se naziva i primitivna funkcija od f. Dakle, svaka antiderivacija $G(x)$ razlikuje se od neke proizvoljno odabrane antiderivacije $F(x)$ samo za neku konstantu C, tj. $G(x) = F(x) + C$, tj. razlika dviju antiderivacija funkcije $f(x)$ uvijek je konstanta.

U Leibnitzovoj simbolici derivacija od $F(x)$ označava se s $\frac{d}{dx}F(x)$. Leibnitz je također uveo i simbol za antiderivaciju. On je svaku antiderivaciju funkcije $f(x)$ označavao s $\int f(x)\,dx$. Dakle, ako je $F'(x) = f(x)$, tada je $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. Pojam neodređenoga integrala koristi se kao sinonim za antiderivaciju. To je potpuno opravdano s obzirom na to da neodređenim integralom funkcije $f(x)$ zovemo njezin integral s promjenjivom granicom:

$$\int_a^x f(t)\,dt \tag{11}$$

Tako definirani neodređeni integral funkcije $f(x)$ nije broj, već funkcija od x. Ta funkcija antiderivacija je funkcije $f(x)$, ako ih $f(x)$ uopće i ima. Ipak, bitno je napomenuti da neodređeni integral oblika $\int_a^x f(t)\,dt$ ne obuhvaćaju sve antiderivacije funkcije f [12].

5. PRIMJENA INTEGRALA U EKONOMIJI

Integrali u ekonomiji uglavnom dolaze do izražaja u dinamičkoj analizi, gdje se, umjesto u statičnoj točci, promatra ponašanje pojava i elemenata u nekakvim vremenskim periodima. U ovom dijelu, rad nastoji predočiti specifične prilike za implementaciju integralnog računa kroz niz realnih primjera.

5.1. FUNKCIJE TROŠKOVA I PRIHODA

Do granične funkcije dolazi se diferenciranjem zadane ukupne funkcije (npr. funkcije ukupnih troškova). Budući da je diferenciranje obrnuti proces od integriranja, postupak integracije na graničnoj funkciji rezultira ukupnom funkcijom.

Ako postoji neka funkcija marginalnog troška (MC) uz nekakve $C(0)=C_0$ fiksne troškove tada se funkcija fiksnih troškova definira kao:

$$C(Q) = \int MC(Q)\, dQ \tag{12}$$

Integriranje funkcije MC rezultirat će s beskonačno mnogo funkcija u kojima fiksni troškovi (C_0) određuje konstantu integracije i igraju ključnu ulogu u konkretnoj funkciji troškova. Prema tome, funkcija marginalnih troškova definira se kao:

$$R(Q) = \int MR(Q)\, dQ \tag{13}$$

I, kao što je i sa fiksnim troškovima, pridodavanjem konstante R_0 rezultira konkretnom funkcijom prihoda.

Dakle, ako određeno poduzeće sa marginalnim funkcijama troškova i prihoda:

$$MC(Q) = 2e^{0,2Q} \tag{14}$$

$$MR(Q) = 28Q - e^{0,2Q} \tag{15}$$

Posluje s fiksnim troškovima $C_0=90$, a fiksnim prihodima $R_0=100$, moguće je odrediti funkcije troškova i prihoda na način:

$$C(Q) = \int MC(Q)\, dQ = \int 2e^{0,2Q}\, dQ = 10e^{0,2Q} + c \tag{16}$$

Korištenjem uvjeta C(0) = 90 i činjenice da za Q = 0 vrijedi C = Cf dobiva se C(0) = 10 + c = 90 tako da slijedi da konstanta c iznosi 80. Iz toga proizlazi funkcija troškova oblika $C(Q) = 10e^{0.2Q} + 80$. Analogno se dobiva i funkcija prihoda:

$$R(Q) = \int MR(Q)\, dQ = \int (28Q - e^{0,2Q})\, dQ = 14Q^2 - 5e^{0,2Q} + c. \quad (17)$$

Slično, koristeći uvjet $R(0) = 100$ dobiva se $c = 105$, pa je stoga dobivena funkcija troškova $R(Q) = 14Q2 - 5e^{0,2Q} + 105$.

Uz granične funkcije troškova i prihoda, postoji i granična sklonost štednji u funkciji dohotka $S'(Y) = 0{,}3 - 0{,}1Y^{-\frac{1}{2}}$ kod koje je moguće pronaći funkciju štednje $S'(Y)$ uz poznate varijablu, na primjer $S = 0$, uz poznati dohodak, na primjer $Y = 81$, integracijom funkcije $S'(Y)$.

$$S(Y) = \int \left(0{,}3 - 0{,}1Y^{-\frac{1}{2}}\right) dY = 0{,}3Y - 0{,}2Y^{\frac{1}{2}} + c \quad (18)$$

Uvrštavanjem ranije definiranih varijabli dolazi se do konstante c u specifičnom slučaju ovog primjera [6].

5.2. INVESTICIJE I AKUMULIRANJE KAPITALA

Akumuliranje kapitala definirano je kao proces uvećavanja danog kapitala. Ako se uzme da je taj proces neprekinut u vremenu, onda se da izraziti kao funkcija vremena $K(t)$ uz upotrebu derivacije $\frac{dK}{kt}$ za označavanje stope akumulacije kapitala. Stopa akumulacije kapitala u vremenu t jednaka je stopi neto investicija koja se mijenja u vremenu t, a označava s $I(t)$. Slijedi da su kapital i neto investicije povezani, i to ovim dvjema jednadžbama:

$$\frac{dk}{dt} = I(t) \quad (19)$$

$$K(t) = \int I(t)\, dt = \int \frac{dk}{dt} dt = \int\ dK \quad (20)$$

Prva jednadžba predstavlja identitet te pokazuje jednakost neto investicije i prirasta kapitala. Budući da je $I(t)$ derivacija $K(t)$ očito je da je $K(t)$ integral ili antiderivacija $I(t)$ kao što je to navedeno u drugoj jednadžbi. Pored neto investicije, povremeno se spominje i bruto investicija (I_g). Njihova međuovisnost prikazuje se kroz jednadžbu gdje δ predstavlja stopu deprecijacije kapitala:

$$I_g = I + \delta K \tag{21}$$

U realnom primjeru određivanje funkcije kapitala na nekom intervalu [0, t] čini se kroz formulu:

$$\int_0^t I(t)\, dt = K(t) - K(0) \tag{22}$$

$K(0)$ označava početnu vrijednost kapitala tako da slijedi da je kapital u po volji odabranom trenutku:

$$K(t) = K(0) + \int_0^t I(t)\, dt \tag{23}$$

Dakle, količina kapitala u po volji odabranom trenutku t jednaka je zbroju početnog i do tog trenutka akumuliranog kapitala [6].

5.3. VRIJEDNOST NEPREKIDNOG TOKA PRIHODA

Neprekidni tok prihoda često se uspoređuje s pojmom neprekidnog ukamaćivanja. Dakle ukoliko nekakvo poduzeće posjeduje prihode koji neprestano dolaze, oni se uobičajeno predstavljaju funkcijom vremena. S obzirom da stopa po kojoj se priljeva određeni prihod može varirati, tok tih prihoda može se opisati funkcijom $S(t)$ koja predočuje brzinu protoka u nekim novčanim jedinicama godišnje. Bitno je napomenuti da takva stopa ovisi o vremenu t, te da se nerijetko mjeri u godinama. Određivanje sadašnje vrijednosti (PV) neprekidnog toka prihoda kroz T godina nužno je podijeliti interval $[0, T]$ na n jednakih dijelova s točkama koje predstavljaju po jednu uplatu $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$. Uz konstantnu kamatnu stopu r, sadašnja vrijednost (PV) tog toka prihoda aproksimira se Riemannovom sumom:

$$PV \approx \sum_{i=1}^{n} s\,(t)e^{-rt_i}\Delta t \tag{24}$$

Kada broj uplata n teži u beskonačnost, a razmak između uplata je jednak 0, tada je:

$$PV = \int_0^T S(t)e^{-rt}\, dt \tag{25}$$

Sukladno tome, buduća vrijednost (FV) je dana s:

$$PV = e^{rT} \int_0^T S(t) e^{-rt}\, dt \qquad (26)$$

Na primjer, ako nekakav investitor uplaćuje godišnje 150 tisuća eura uz povratnu stopu od $r = 8{,}0\%$. Uz pretpostavku neprekidnog toka iznos te investicije u periodu od 10 godina rješavao bi se po:

$$Fv = e^{0.80} \int_0^{10} 0{,}15 e^{-0.08t}\, dt \qquad (27)$$

Njegova će investicija vrijediti približno 2.29789 miliona eura nakon perioda od 10 godina. [6]

Ako prihodi nisu promatrani na konačnom intervalu, tada se promatra budući prihod koji će trajati vječno. Takve situacije proizlaze iz vječnih ugovora ili prihoda koji nastaju od posjedovanja neuništivog kapitala (zemlja ili slično). Tada se sadašnja vrijednost definira kao nepravi integral:

$$PV = \int_0^{\infty} s(t) e^{-rt}\, dt \qquad (28)$$

5.4. POTROŠAČEV I PROIZVOĐAČEV VIŠAK

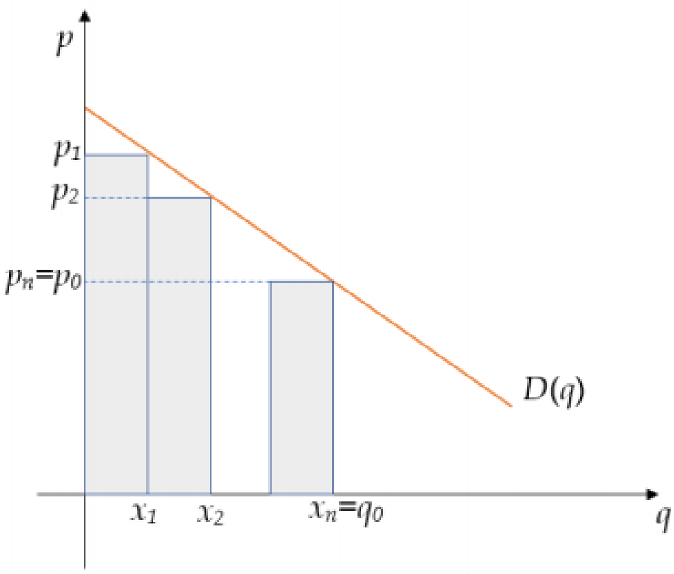
U osnovnom ekonomskom modelu ponude i potražnje za određenim proizvodom ili uslugom u slobodnom tržištu s dvije krivulje opisuje se količina i cijena tog proizvoda ili usluge. Te krivulje nazivaju se krivuljama ponude i potražnje (Q_s-Q_d model).

U takvom modelu, količina nekakvog dobra koju su proizvođači spremni ponuditi po određenoj cijeni definirana je funkcijom ponude dok je funkcijom potražnje definirana količina koju su potrošači spremni kupiti, odnosno potraživati, po nekakvoj cijeni.

Cijena jedinice proizvoda se označava s p, a količinu isporučenu po toj cijeni s q. Iz toga se formira da je cijena funkcija količine $p = f(q)$. Dakle, krivulja ponude funkcija je $p = S(q)$, a krivulja potražnje $p = D(q)$. Zaključak je da je krivulja S rastuća, a krivulja D padajuća (ako cijena raste, s njom raste i ponuda dok potražnja opada)

Točka sjecišta funkcija ponude i potražnje naziva se točka tržišne ravnoteže, dok se brojevi q_0 i p_0 zovu ravnotežna količina i ravnotežna cijena, reprezentativno. U idealnom tržištu najveći dobitak i proizvođača i potrošača najveći je na ravnotežnoj cijeni. Ako svi potrošači kupuju po cijeni p_0, onda je kupljena količina jednakoj q_0, te ukupna vrijednost potrošenog za tu količinu iznosi $p0 \cdot q0$.

Ako je cilj izračunati ukupnu količinu koja bi bila potrošena ako svaki potrošač plati maksimalnu cijenu do koje je spreman platiti, onda se interval $[0, q_0]$ dijeli na n jednakih dijelova duljine $\Delta x = \frac{q_0}{n}$, tada će podijeljene točke biti $\{ xi = \frac{i}{n} q0 : i = 0, \ldots, n \}$. Ako se uzme neki interval $[0, x_1]$, odnosno ako se pretpostavi da je broj dostupnih jedinica ograničen s x_1, tada su ukupni izdatci za kupnju svih dostupnih jedinica jednaki $D(x_1) \cdot \Delta x$ (cijena po jedinici pomnožena s brojem jedinica) [6].



Slika 10: Ukupna svota novca koju bi platili potrošači [8]

Kada se sve jedinice x_1 rasprodaju, nastupa pretpostavka dostupnosti drugog broja jedinica x_2 po cijeni od $D(x_2)$. Razlika prodanih jedinica $x_1 - x_2$ dovodi do broja troška $D(x_2)\Delta x$ zbog razlike u cijenama. Nastavak postupka rezultirat će ukupnom svotom novca koju bi potrošači platili po Riemannovoj sumi:

$$TA \approx \sum_{i=1}^{n} D(x_1)\Delta x \tag{29}$$

Proizlazi zaključak da je za $n \to \infty$ svota novca jednaka:

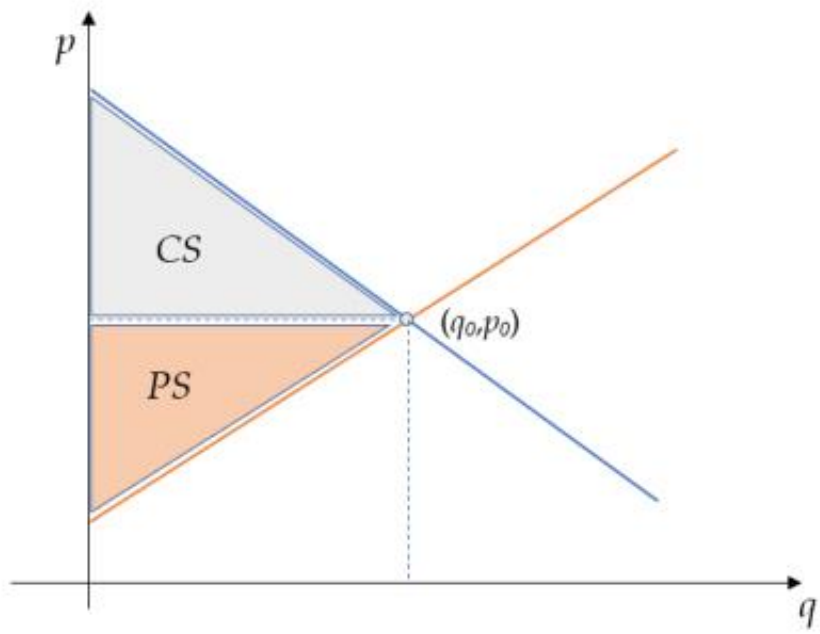
$$TA = \int_0^{q_0} D(q)\, dq \tag{30}$$

Razlika površine ispod grafa $D(q)$ i pravokutnika površine $p_0 q_0$ predstavljat će vrijednost koju potrošači uštede kupujući po ravnotežnoj cijeni. Ta pojava zove se potrošačev višak i definira se kao:

$$CS = \int_0^{q_0} D(q)\mathrm{dq} - \mathrm{p_0 q_0} = \int_0^{q_0} (D(q) - p_0)\, dq \tag{31}$$

Na suprotnoj strani ravnoteže pojavljuje se proizvođačev višak. On predstavlja iznos koji proizvođači ostvaruju prodajom po tržišnoj cijeni koja je viša od najmanje za koju bi bili voljni prodati. Matematički se definira kao:

$$PS = p_0 q_0 - \int_0^{q_0} S(q)\mathrm{dq} = \int_0^{q_0} \big(p_0 - S(q)\big)\, dq \tag{32}$$



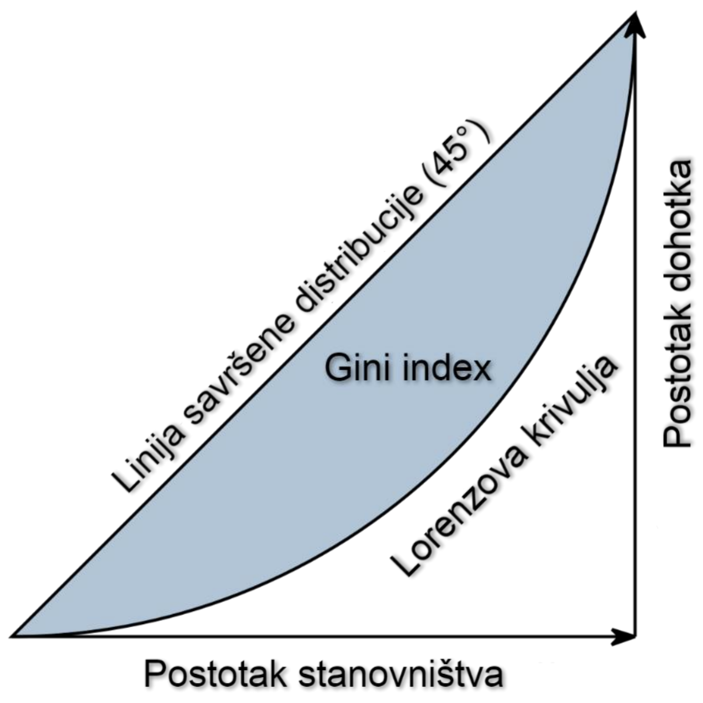
Slika 11: Proizvođačev i potrošačev višak [8]

5.5. GINI INDEKS

Gini indeks se zapravo bavi pitanjem jednakosti i pravednosti raspodijele dohotka u državi. U standardnim modelima u ekonomiji često se spominje nepravedna ili pretjerano "pravedna" raspodjela kao prepreka rastu, razvoju i mogućnostima. No da bi bilo moguće raspravljati o prednostima i nedostatcima raspodjele, nužno ju je kvantificirati. U tu svrhu najčešće se koristi metoda Lorenzove krivulje i Ginijevog indexa.

Max Otto Lorenz bio je američki ekonomist njemačkog podrijetla koji je u svom završnom radu razvio nešto što će kasnije Willford I. King nazvati Lorenzova krivulja. Njegova se krivulja definira kao rastuća funkcija koja mjeri udio nečega što posjeduje donji udio x populacije. Ako je potreban realan primjer za kompletno shvaćanje, neka je $L(0.4) = 0.2$. Takav slučaj označavao bi da 40% dane populacije posjeduje 20% dohotka u državi. Zbog toga što se Lorenzova krivulja čita od dolje ili s kraja, vrijedi $L(x) \leq x$ za svaki x.

Dakle, u slučaju idealne pravednosti, Lorenzova krivulja imala bi oblik $L(x) = x$. Svaka Lorenzova krivulja koja predstavlja realan slučaj bit će ispod te krivulje. Naposljetku, gini indeks je ništa drugo nego koeficijent koji mjeri postotak razlike idealne I stvarne Lorenzove krivulje [6].



Slika 12: Gini indeks

Drugim riječima, gini indeks je naziv za omjer površina ispod grafa $f(x) = x$ i praznine između $f(x) = x$ i Lorenzove krivulje (Tamno plava površina na slici 10.) na način:

$$G = 100\frac{\int_0^1 \left(x-\left(0{,}3x+0{,}7x^4\right)\right)dx}{0{,}5} = 200\int_0^1 (-0{,}7x + 0{,}7x^4)\,dx = 42\% \qquad (32)$$

6. ZAKLJUČAK

S alatima prezentiranima u ovom radu moguće je predvidjeti pojave na ekonomskoj pozornici na sličan način na koji meteorolozi određuju vrijeme. Promjena cijene uslijed promjene omjera ponude i potražnje, promjena raspodjele dohotka uslijed promjene vlasti u državi, pa čak i prinos investicije koji je moguće ostvariti kod slučajeva s neprekidnim priljevom novca. Sve te pojave ponašaju se po zakonima čije razumijevanje omogućuje integralni račun, a time i ovaj rad.

Matematika i novac imaju jednu zajedničku stvar. Za oboje se kaže u narodu da su univerzalni jezici, tako da se za ovaj rad, zapravo, može reći da je univerzalno bilingvalan. On je imao za cilj objasniti na koji način su određeni dijelovi ta dva jezika neraskidivo povezani. Tek sa razumijevanjem oba jezika, čovjek stiče široku sliku i poimanje efekta izbora koji novac ima, te u kolikoj mjeri zapravo utječe na njegov svakodnevni život.

U svakom slučaju jedna tvrdnja je istinita. Bez kvantifikacije podataka i obrade u dinamičkim modelima koje ovaj rad, koliko god je to moguće, laicizira, vidljivo je da bi ekonomija ostala na takoreći slijepoj i jednodimenzionalnoj razini na kojoj je bila kod prvih ekonomskih filozofa u staroj Grčkoj koji su debatirali njene moralne, no ne i njen razvojne, potencijale.

Vidljivo je, kroz razvoj ekonomske misli, da ekonomski sustavi konzistentno evoluiraju s tehnološkim mogućnostima čovječanstva i njegovim kapacitetom za proizvodnju. Napredak je očit u svakodnevnom životu i eksponencijalan kroz vrijeme. Tako i logika nalaže da veći kapaciteti daju veću mogućnost za napredak koja za uzvrat ima učinak povećanja kapaciteta. Pojavom dinamičke analize, spomenuti napredak nije samo moguće kvantificirati, nego i maksimizirati zbog boljeg uvida u ekonomske zakonitosti učinkovitosti i ostalih nijansi ekonomskog platna.

Tako uporaba matematike u ekonomske svrhe ulazi u svaku poru društva i diže životni standard milijardama ljudi, omogućuje široj populaciji da shvati kakva je financijska situacija, kako u domaćinstvu, gradu ili državi, tako i u cijelome svijetu.

LITERATURA

[1] Benić, Đ.: Ekonomska misao u starom i srednjem vijeku: Zagreb, 2021.

[2] Borozan, Đ.: *Makroekonomija*: Ekonomski fakultet, Osijek, 2012.

[3] Chiang, A.C.: *Osnovne metode matematicke ekonomije*: New York, 1984.

[4] Dragičvić, A.: *Razvoj ekonomske misli*: Zagrab, 1987.

[5] Drpljanin, S.: *Matematika 1*: Tuzla, 1997.

[6] Nuraković, M.: *Matematika za ekonomiste*: Tuzla, 2013.

[7] Pašić, V.: *Matematika za ekonomiste:* Prirodoslovno-matematički fakultet, Tuzla

[8] Petrinović, M: *Primjene diferencijalnog i integralnog računa u ekonomiji, diplomski rad*: Sveučilište J. J. Strossmayera, Osijek, 2019.

[9] Reić, Z.: *Ekonomija*: Ekonomski Fakultet, Split, 2017.

[10] Samuelson, P.A.: *Ekonomija: uvodna analiza*: Boston, 1998.

[11] https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?id=62478, (pristupljeno 18.08.2021.)

[12] https://www.fsb.unizg.hr/matematika/poglavlje1.1, (pristupljeno 20.08.2021.)

[13] https://mojaknjiga.hr/bogatstvo-naroda-adama-smitha/, (pristupljeno 08.10.2021.)

[14] https://www.nytimes.com/2016/01/12/upshot/john-maynard-keynes-great-economist-terrible-currency-trader.html, (pristupljeno 08.10. 2021.)

[15] https://www.freepik.com/premium-vector/sale-percentage-set-10-20-30-off-other-red-yellow-label-template_10317572.htm, (pristupljeno 08.10. 2021.)

[16] https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?id=50325, (pristupljeno 19.8.2021.)

[17] https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?id=49439, (pristupljeno 19.8.2021.)

[18] https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?id=49786, (pristupljeno 19.8.2021.)

[19] http://lavica.fesb.unist.hr/matematika2/predavanja/node26.html, (pristupljeno 20.08.2021.)

POPIS SLIKA