

# Matematika nije bauk

---

**Aglič Čuvić, Duje**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Split, Faculty of Maritime Studies / Sveučilište u Splitu, Pomorski fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:164:844868>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-11-26**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository - Faculty of Maritime Studies - Split -  
Repository - Faculty of Maritime Studies Split for  
permanent storage and preservation of digital  
resources of the institution](#)



UNIVERSITY OF SPLIT



**SVEUČILIŠTE U SPLITU**

**POMORSKI FAKULTET**

**DUJE AGLIĆ ČUVIĆ**

**MATEMATIKA NIJE BAUK**

**ZAVRŠNI RAD**

**SPLIT, 2020.**

**SVEUČILIŠTE U SPLITU  
POMORSKI FAKULTET**

**STUDIJ: POMORSKA NAUTIKA**

**MATEMATIKA NIJE BAUK**

**ZAVRŠNI RAD**

**MENTOR:**

**izv. prof. dr. sc. Tatjana Stanivuk**

**STUDENT:**

**Duje Aglič Čuvic (MB:0171270162)**

**SPLIT, 2020.**

## SAŽETAK

Cilj ovog rada je prikazati povijest matematike od njenih početaka pa sve do danas, te analizirati probleme s kojima se učenici i studenti mogu suočavati. Ipak, iza svakog matematičkog postignuća stoji i osoba koja je uspjela dokazati povezanost matematike sa prirodom i svakodnevicom. Postoji više problema u učenju i oni su pojašnjeni od njihovog začetka do pokušaja njihovog rješavanja. Problemi u učenju mogu se riješiti na nekoliko različitih načina. Poseban naglasak bit će stavljen na razvoj matematike i vještine potrebne da se ona što lakše svlada.

**Ključne riječi:** *matematika, povijesni razvoj, obrazovanje, analiza problema*

## ABSTRACT

Goal of this work is to show the history of math from its beginning till today and to analyze the problems that pupils and students may face. Nevertheless, behind every math achievement there is a person that managed to prove the parallel between math and science and everyday use. There are multiple problems when studying and those problems are explained from their beginning until their solution. Problems with studying can be solved in a few different ways. Special accent will be put on development of math and skill needed to master it more easily.

**Key words:** *mathematic, historical evolution, education, problem analysis*

# SADRŽAJ

<b>1. UVOD .....</b>	<b>1</b>
<b>2. OPĆENITO O MATEMATICI.....</b>	<b>2</b>
<b>2.1. POVIJEST MATEMATIKE .....</b>	<b>4</b>
<b>2.2. MATEMATIKA U ANTIČKOJ GRČKOJ.....</b>	<b>6</b>
<b>2.3. MATEMATIKA U SREDNJEM VIJEKU.....</b>	<b>9</b>
<b>2.4. VRHUNAC MATEMATIKE U 17.STOLJEĆU .....</b>	<b>14</b>
<b>2.5. SUVREMENA MATEMATIKA .....</b>	<b>18</b>
<b>2.5.1. Matematika i sport .....</b>	<b>18</b>
<b>2.5.2. Matematika u ekonomiji.....</b>	<b>19</b>
<b>2.5.3. Matematika u medicini .....</b>	<b>20</b>
<b>2.5.4. Matematika kao kraljica znanosti .....</b>	<b>20</b>
<b>2.5.5. Statistika.....</b>	<b>21</b>
<b>3. MATEMATIKA U OBRAZOVANJU .....</b>	<b>22</b>
<b>3.1. MATEMATIKA U OSNOVNOŠKOLSKOM OBRAZOVANJU.....</b>	<b>22</b>
<b>3.2. MATEMATIKA U SREDNJIM ŠKOLAMA.....</b>	<b>23</b>
<b>3.3. MATEMATIKA U VISOKOŠKOLSKOM OBRAZOVANJU .....</b>	<b>25</b>
<b>4. ZAŠTO MATEMATIKA PREDSTAVLJA PROBLEM.....</b>	<b>26</b>
<b>4.1. ZAŠTO DJECA IMAJU PROBLEME PRI UČENJU MATEMATIKE.....</b>	<b>27</b>
<b>5. EH, TA MATEMATIKA .....</b>	<b>30</b>
<b>6. ZAKLJUČAK .....</b>	<b>34</b>
<b>LITERATURA .....</b>	<b>35</b>
<b>POPIS SLIKA.....</b>	<b>37</b>

# 1. UVOD

Matematika je nazvana kraljicom znanosti jer je temelj gotovo svih znanosti. Može se pronaći na svakom koraku. Ona je razlog zbog kojeg se čovječanstvo i danas razvija. Matematika opisuje principe fizike, objašnjava eksperimentalne rezultate i čak predviđa nove fenomene. Temelj je za mnoštvo stvari koje se danas uzimaju zdravo za gotovo. Pa ipak, najdublje tajne često se kriju u stvarima koje se smatraju očiglednim.

Kompjutor, kalkulator, razni brojači, ..., uvelike pomažu pri računanju zadataka, ali pravi razlog zašto se ona razvila, ovakva kakva je danas, proizlazi, ne samo iz potrebe već i iz ljudske maštovitosti. Matematika pomaže pri logičkom razmišljanju i razvoju didaktičkih sposobnosti, razvoju svih zanimanja bez kojih bi život danas bio neizmjereno teži i kompliciraniji.

Upravo zbog toga, ovaj je završni rad osmišljen na sljedeći način: Nakon ovog uvodnog dijela slijedi dio u kojem je prikazan razvoj matematike kroz povijest. U istom je dijelu naglašena njena važnost u razvoju civilizacija i kultura koje su ostavile najljepše baštine koje su i danas neobjašnjive te se mnoge od njih smatraju svjetskim čudima. Također je dana definicija i podjela matematike kako bi se dalo uvid u problematiku koja zbog iste i slijedi. Slijedeći tj. treći dio govori o matematici u školstvu i obrazovanju. Šta se, kako i kad uči iz ovog zahtjevnog nastavnog predmeta. Kako pomoću učenja matematike ljudi postaju sve kreativniji te kako se znanje matematike sve više primjenjuje u svakodnevnom životu. Četvrti dio ovoga rada nagovještava probleme koji se javljaju pri savladavanju i usvajanju matematičkih znanja, te kako ih je moguće spriječiti, ali i „liječiti“. Analiziraju se razlozi koji nastaju prilikom savladavanja nastavnog gradiva iz matematike, te zašto učenici i studenti mogu imati problema sa matematikom. Peti dio, zanimljivog i prepoznatljivog naziva „Eh, ta matematika“ pokušava objasniti kako i kada dolazi do problema sa predmetom matematika te pokušava predložiti metode kako iste savladati. Na kraju slijedi zaključak koji objedinjuje sve navedeno sa naglaskom da je matematika predmet koji, kada se uči pravilno i redovito, ne predstavlja bauk već zadovoljstvo.

## 2. OPĆENITO O MATEMATICI

Matematika (od grčkog *mathema* - znanost) je egzaktna (točna, nedvojbena) znanost koja proučava istinite definirane apstraktne teorije koristeći matematičku logiku. Matematika se nalazi gdje god se javljaju pitanja vezana za veličinu, strukturu, prostor ili promjenu. U početku vezano uz mjerenje zemljišta i trgovinu, kasnije astronomiju, a danas se javlja na svakom koraku. Matematika se uči u osnovnim i srednjim školama kao obavezan predmet. Također i veliki dio fakulteta ima obavezne i izborne matematičke kolegije. Važnost matematike postaje jasnija i cjenjenija svakim novim zadatkom koji se postavi pred ljudsko biće, bilo na papiru ili usmenom predajom, u prirodi ili na poslu; kraće rečeno u svakodnevnom životu.

Osnove matematike sadrže izučavanje strukture, prostora i promjenu.

Strukture matematike:

1. Teorija brojeva – grana opće matematike koja se bavi proučavanjem cijelih brojeva. Zbog svog iznimno važnog položaja u matematici ponekad se naziva kraljicom matematike. Stariji izraz za teoriju brojeva je aritmetička teorija.

2. Osnova algebra – disciplina koja uz pomoć logike gradi određene osnove za matematiku. Suvremena algebra može se gledati kao korištenje već dugo znanih aritmetičkih operacija (zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje) i brojeva, te znakova da budu temelj suvremenoj matematičkoj logici. Potpuna algebra počinje tek u osamnaestom stoljeću. U tom vremenu Leonhard Euler, švicarski matematičar, fizičar i astronom, počinje istraživati brojeve, posebno proste. Njegova istraživanja dovela su do osnova teorije brojeva kakva danas postoji. Veliki doprinos algebri donio je i francuski matematičar Evariste Galois koji je prvi uveo pojam grupe. Danas je algebra veoma važna i koristi se kao osnova za izgradnju ostalih grana matematike, u informatici, teorijskoj fizici,...

3. Teorija grupa – proučava svojstva grupa u matematici. One su jedne od struktura u matematici i opisuju pravila koje elementi određenog skupa zadovoljavaju.

4. Teorija redoslijeda – proučava kada je jedan od objekata manji ili veći od drugoga.

Prostor matematike:

1. Geometrija – bavi se proučavanjem raznih prostora i matematičkom formalizacijom tih istih prostora. Povijesno se može podijeliti na četiri tipa: antičku, srednjovjekovnu, novu i

suvremenu. U antici "*Elementi*", djelu koje je napisao Euklid, je od velike važnosti i posvećeni su apsolutnoj istini euklidske geometrije (trokuti, kvadrati, hiperbole, parabole, elipse, te trigonometrija). Jedan od velikana bez koga matematika ne bi bila ista je ujedno i Rene Descartes, francuski filozof, matematičar, fizičar te utemeljitelj analitičke geometrije. Analitička teorija je grana u matematici koja pomoću algebarskih metoda prvenstveno linearne algebre služi za rješavanje geometrijskih zadataka. Rene Descartes je ujedno i uveo Kartezijev koordinatni sustav, bijekciju između skupa točaka euklidskog prostora. Zahvaljujući Kartezijevom koordinatnom sustavu hiperbole, elipse i ostale krivulje su mogle biti opisane algebarskim jednadžbama pomoću koordinata točaka u ravnini. On je ujedno i bio od velikog značaja u daljnjem razvoju matematike, te omogućio matematičarima Newtonu i Leibnizu da uskoro otkriju diferencijalni i integralni račun. U devetnaestom stoljeću su otkriveni i novi "*neeuklidski*" tipovi matematike od toga prvenstveno valja izdvojiti Reimannovu geometriju koja je dio suvremene diferencijalne geometrije. Reimannovi najveći doprinosi su njegov rad na teoriji brojeva te u geometriji gdje je generalizirao Gaussov koordinatni sustav.

U suvremenoj geometriji sad već postoji mnogo geometrijskih teorija kao što su diferencijalna geometrija, algebarska geometrija, geometrija toposa, konačna geometrija, a u najnovije doba pojavljuje se i izvedena geometrija (geometrija koja je "derivirana" u smislu homološke algebre). Iz geometrije se razvila još jedna važna matematička grana topologija kod koje je najbitnija kvaliteta, a ne kvantiteta promatranih objekata geometrijskih tijela (prilikom gnječenja, rastezanja). Značajnu ulogu u smišljanju novih tipova prostora danas imaju produktivnost iz moderne fizike, teorije struna, opće teorije relativnosti i kvantne teorije polja.

2. Trigonometrija – dolazi od grčkih riječi "*trigono*" što znači trokut te "*metro*" što znači mjera i to je dio matematike koji proučava odnose između dužina stranica trokuta i kutova trokuta na površini kugle (sferna trigonometrija) ili ravnini (ravninska trigonometrija).

3. Diferencijalna geometrija – izučava geometrijska svojstva prostora na kojima se primjenjuju metode diferencijalnog računa.

4. Topologija – proučava svojstva geometrijskih oblika koja ostaju invarijantna kad se ti oblici izobličuju gnječenjem i rastezanjem. Grane topologije su opća topologija, algebarska topologija, geometrijska topologija, diferencijalna, te gruba topologija. Prvi važni teorem u topologiji je bio Eulerov koji tvrdi da je za svaki konveksni poliedar broj vrhova oduzet od broja bridova plus broj stranica točno dva neovisno o poliedru. Henri Poicanre, čovjek za kojeg



kažu da je osnivač moderne topologije, topologiju je nazivao *analysis situs*, te je njegov doprinos na području topologije bio ogroman.

5. Fraktalna geometrija – objekti koji daju jednaku razinu detalja neovisno o razlučivosti. Dakle, fraktale je moguće povećavati beskonačno mnogo, a da se prilikom toga uvijek vidi neki novi detalj koji prilikom povećanja nije bio vidljiv te da količina detalja uvijek bude jednaka.

Promjene:

Razumijevanje i opisivanje promjena mjerljivih varijabli je glavna značajka prirodnih znanosti, i diferencijalni (infinitezimalni) račun je razvijen u te svrhe. Centralni koncept kojim se opisuje promjena varijable je funkcija. Mnogi prirodni problemi su vodili uspostavljanju veze između vrijednosti i količine izmjene, a pritom razvijene metode izučavaju se u diferencijalnim jednadžbama. Brojevi koji predstavljaju kontinualne veličine su realni brojevi, a detaljno izučavanje njihovih svojstava i funkcija je predmet matematičke analize. Zbog unutrašnjih, matematičkih, razloga uveden je koncept kompleksnih brojeva, koji je glavni predmet izučavanja kompleksne analize. Funkcionalna analiza je usredotočena na  $n$ -dimenzionalne prostore funkcija postavljajući time neke od primjenjivih osnova i za izučavanje kvantne mehanike. [14]

## 2.1. POVIJEST MATEMATIKE

Staro egipatska kultura bila je jedna od najstarijih kultura i civilizacija u povijesti svijeta. Osim što je Egipat poznat po mnogim spomenicima, vjeri te baštini poznata je i kao jedna od najstarijih epoha te znanosti. Posebno je važna jedna grana te znanosti koja se razvila u starom Egiptu, a to je geometrija što u doslovnom prijevodu znači mjerenje zemlje. Svima je poznata izreka "*Egipat je dar Nila*" jer bez te rijeke ne bi danas postojala Egipatska kultura, no trebalo je tu kulturu i sačuvati. Stari Egipćani su pomoću geometrije računali gdje graditi svoja zemljišta i nasjede kako bi ih sačuvali od poplava. Poznavanje i razumijevanje geometrije pomoglo im je da izgrade veličanstvene hramove, kipove i piramide, po kojima je Egipat zapravo i poznat. O staroj Egipatskoj matematici saznaje se najviše iz dva papirusa Ahmesovog ili Rindovog i Moskovskog. Rindov papirus je 1852. godine otkrio škotski egiptolog Henri Rind u Luksoru. Zapravo se radi o svitku dužine 6 metara te širine 30 centimetara. Pisao ga je pisar Ahmes 1650. godine prije nove ere i pretpostavlja se da je nastao tako što je Ahmes prepisivao neki još stariji spis. Danas se nalazi u Londonskom muzeju i isti sadrži 87 matematičkih problema. "To je kompletna studija o svim stvarima, pogled u unutrašnjost svega što postoji",

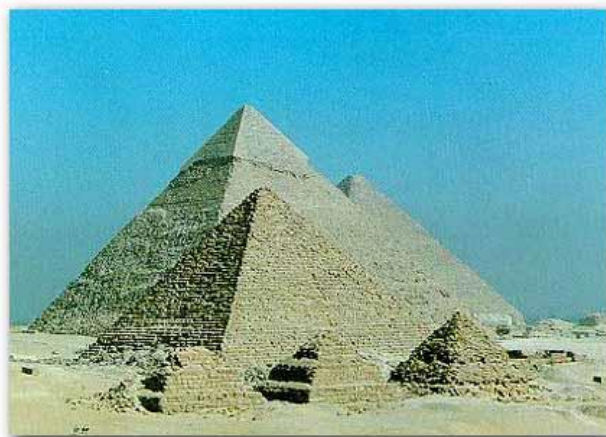
stoji na tom papirusu. Ahmesov papir je zbirka tablica i zadataka kojoj je smisao učenje matematike. Sadrži vježbe iz aritmetike, algebre, geometrije i raznih mjerenja. Moskovski papirus otkriven je 1983. godine i dug je 6 metara i širok 8 centimetara. Sadrži 25 matematičkih problema, ali mnogi od njih nisu čitljivi.

Stari Egipćani su imali razvijen decimalni sustav i svoje oznake za brojeve. Pisalo se pomoću hijerografskih znakova od gore prema dolje, a nekad i s desne na lijevu stranu, a ponekad i obrnuto. Egipatski način pisanja brojeva nije pozicijski stoga redosljed kod njih nije bio problem. Hijeratički znakovi su uvedeni za zapisivanje po lončariji, papirusu i ono je bilo brže. Osim navedenih znakova ponekad su i upotrebljavali neke nove znakove. Koristili su brojevni sistem sa bazom 10, a jedna od glavnih razlika između našeg brojevnog sustava i hijeratičkog je to što hijeratički brojevi nisu bili pisani u sistemu mjesnih vrijednosti, tako da su ti brojevi mogli biti pisani u bilo kojem željenom redosljedu. Hijeratički sistem je adicijski sistem pa se, na primjer, broj 249 zapisivao kao

$$2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 9.$$

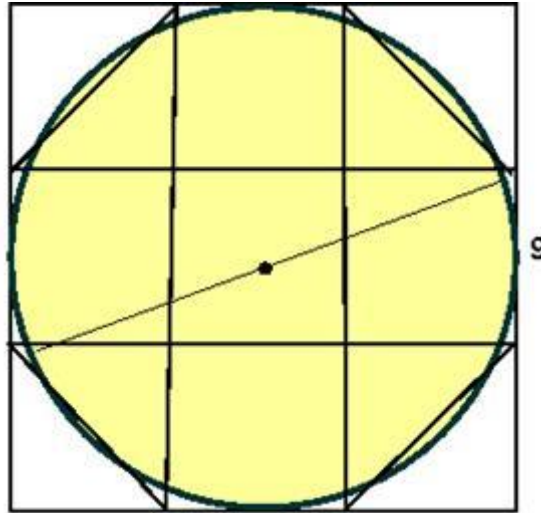
Egipatski brojevni sustav nije baš bio pogodan za računanje, ali je trgovina zahtijevala osnovne matematičke funkcije kao što su zbrajanje, oduzimanje, dijeljenje te rad sa razlomcima.

Danas je teško i zamisliti sve ono što su Egipćani uspjeli stvoriti, pa je od velike važnosti sačuvati upravo tu veličanstvenu baštinu. Još u ono doba, Egipćani su znali računati nagib piramide, obim krnje piramide te obim piramide.



**Slika 1. Egipatska piramida [10]**

Računali su površinu kutova kao polovicu proizvoda dviju kraćih stranica, a mala odstupanja koja bi se znala dogoditi nisu im previše značila. Znali su izračunati i površinu kuta pomoću dužina njegovih stranica.



**Slika 2. Računanje površine Egipatskog kuta [10]**

Evo i načina na koji se može dobiti formula slična egipatskoj za površinu kruga; uspoređujući krug sa kvadratom:

1. promjer kruga je 9, dakle, opiše mu se kvadrat stranice duljine 9;
2. podijeli se svaka stranica kvadrata na trećine;
3. formira se osmerokut kao na slici 2;
4. površina dobivenog osmerokuta približno je jednaka površini kruga;
5. površina osmerokuta jednaka je površini kvadrata umanjena za dva mala kvadrata sačinjena od 4 "odrezana" trokuta tj.

$$P(\text{osmerokut}) = 9 * 9 - 4 \left( \frac{1}{2} * 3 * 3 \right) = 63 \text{ približno } 64 = 8^2.$$

## **2.2. MATEMATIKA U ANTIČKOJ GRČKOJ**

Temelju matematike u antičkoj Grčkoj zasigurno je uvelike pripomogla matematika u starijim kulturama i civilizacijama kao što su bili Sumerani, Babilonci, Egipćani, koji su kroz geometriju razvili apstraktan model matematike. U staroj Grčkoj filozofi su bili podijeljeni u nekoliko škola: Jonjani, njihov osnivač je Tales i za njega se smatra da je dao prve deduktivne dokaze, te razvio 5 osnovnih teorema o geometriji ravnine. Pitagorejci, osnovao ih je Pitagora,

koji je proučavao ravninsku geometriju, geometriju likova, razmjere i teoriju brojeva. Elejci, osnovao ih je Zenon iz Eleje, najpoznatiji po svoja četiri paradoksa. Sofisti, još jedna škola koju je osnovao Pitagora, te su oni bili poznati po tome što su se bavili obrazovanjem drugih u Grčkim gradovima. Platonisti, sljedbenici Platona, koji potiču istraživanje matematike nalik na moderno sveučilište.

U antičko se doba prvi put spominje i dio matematike po imenu trigonometrija. Ime je nastalo od grčkih riječi:  $\text{trigonon} = \text{trokut} + \text{metron} = \text{mjera}$ . Osim što trigonometrija zahtijeva mjerenje kutova ona se bavi računanjem trigonometrijskih funkcija, kao što su sinus, kosinus, tangens i kotangens, te njihovih recipročnih vrijednosti. Ista proučava odnose između pravaca i kutova trokuta na ravnini ili površini kugle. Trigonometriji je oslonac sintetička geometrija koju je razvio grčki matematičar Euklid. Trigonometrija je također vrlo važna i u astronomskoj navigaciji prilikom računanja nebeske sfere.

Geometrija je grana matematike koja proučava oblike, njihova svojstva i odnose, a u novije vrijeme ona postaje sve apstraktnija. Osnovni geometrijski pojmovi su točka, pravac, ravnina i prostor, a ostali su geometrijski likovi, geometrijska tijela, dužina, kružnica. Počeci geometrije vezani su uz praktične potrebe, poput mjerenja površine zemljišta ili volumena posuda. Prakticirala se u svim starim kulturama i civilizacijama.

Najpoznatiji matematičari u antičkoj grčkoj su zasigurno bili Pitagora sa Samosa, Platon i Euklid iz Aleksandrije, Tales iz Mileta i Arhimed sa Sirakuze poznat po rečenici "Ne dirajte mi krugove".

Tales je bio jedan od sedam mudraca stare antike: Bijanta, Pitka, Solona, Mizona, Kleobula i Hilona. Bio je matematičar, znanstvenik i filozof. Talesu se pripisuje pet teorema elementarne geometrije. Oni glase:

1. Krug je svakim svojim promjerom podijeljen na dva dijela podjednake površine.
2. Kutovi uz osnovicu jednakokračnog trokuta su jednaki.
3. Kutovi između dva pravca koji se sijeku su jednaki.
4. Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i dva kuta uz tu stranicu.
5. Kut nad promjerom kružnice je pravi.

Pitagora se smatra prvim pravim matematičarom koji je deducirao geometrijske činjenice od osnovnih principa logički. Brojni teoremi se upravo pripisuju na njegovo ime a jedan od njih

koji je zasigurno i najpoznatiji jest da je zbroj kutova u trokutu jednak 180 te poučak o pravom trokutu koji glasi da je površina kvadrata nad hipotenuzom pravokutnog trokuta jednaka zbroju površina kvadrata nad katetama.

Platon je u svojoj knjizi "*Phaedo*" razvio teoriju forme koji smatra matematičke objekte savršenim formama. Prema Platonu takav savršen objekt je crta koja ima duljinu bez širine. Tražio je jasne hipotenuze i egzaktne definicije, ali nije postigao značajnije uspjehe u matematici kao što je primjerice uspio na području filozofije.

Euklid je napisao djelo "*Elementi*" i ono se sastoji od trinaest knjiga i u svom djelu sakupljao je tvrdnje i teoreme svojih prethodnika kao što su Pitagora, Tales i ostali. Najpoznatiji Euklidovi teoremi su:

1. Kroz bilo koje dvije točke moguće je provući jedan i samo jedan pravac.
2. Ako točka B leži između točaka A i C onda se sve tri točke nalaze na istom pravcu.
3. Gibanjem točka prelazi u točku, pravac u pravac te ravnina u ravninu, čuvajući svojstva točke, pravca i ravnine.
4. Svaki po volji veliki odlomak moguće je prekriti bilo kojim drugim odlomkom stavljajući ga na prvi dovoljan broj puta.
5. Ako pravac siječe dva pravca i čini s njima s iste strane unutrašnje kutove koji su zajedno manji od dva pravca, ta se dva pravca sijeku na strani tih kutova.

Arhimed glasi za jednog od najvećih grčkih matematičara te izumitelja zahvaljujući svojim izumima (vijak, poluga, koloturnik). Izračunao je volumene i površine mnogih tijela. Dao je približne izračune broja  $\pi$  kvadratnog korijena. U djelu "*O ravnoteži ravnih likova*" koristeći geometriju dao je osnove matematike te je dokazao brojne teoreme koji se odnose na gravitaciju. U djelu "*O spiralama*" dao je izračune o tangentama kao i o površinama djela krivulja.

Astronomija je bila veliki pokretač pri razvoju trigonometrije. Većina ranijih napredaka otkrivena je na području sferne trigonometrije upravo najviše zbog njene primjene na astronomiju. Hiparh, Ptolomej i Menelaj su 3 začetnika grčke trigonometrije.

Za Hiparha se tvrdi da je bio prva osoba koja je mogla odrediti točno vrijeme izlaska i zalaska pomoću zodijačkih znakova. Hiparha je primijetio Pap iz Aleksandrije koji je bio učitelj u četvrtom stoljeću pomoću knjige koja govori o izlasku dvanaest znakova zodijaka i tvrdio je da pomoću numeričkih izračuna jednakih lukova polukruga koji počinju u zvijezdu Raka zalaze

u određenim vremenskim intervalima i taj vremenski odnos ne mora uvijek biti prikazan. Može se zaključiti da je Hiparh koristio znanja iz sferne trigonometrije za računanje lukova pomoću tablica.

Nakon Hiparha dolazi Menelaj o čijem se životu ne zna baš mnogo, ali se vjeruje da je napisao tri knjige pod nazivom "*Sphaerica*". Te knjige su najraniji pisani oblik sferne trigonometrije. U prvoj knjizi "*Sphaerice*", Menelaj daje koncept i definiciju sfernog trokuta. On ga opisuje kao područje određeno lukovima velikih kružnica na površini sfere uz tvrdnju da je svaka stranica trokuta luk manji od polukružnice. Druga knjiga govori o astronomiji, dok treća govori o trigonometrijskim omjerima.

Posljednji Grk koji je uvelike pridonio razvoju trigonometrije bio je Ptolomej. On je bio glavni izvor informacija o Hiparhu i Aleksandrijskoj trigonometriji. Djelo "*Almagest*" kojeg on potpisuje smatra se vrhuncem grčkog znanstvenog rada zbog metoda izračuna i jasnoće. Korištenje sinusa i kosinusa, te ostalih trigonometrijskih funkcija, javilo se nekoliko stotina godina poslije Ptolomeja, međutim tablice koje je izračunao Ptolomej, koriste izračune koji su ekvivalent današnjim trigonometrijskim podacima kojima se koriste ljudi danas. Ptolomej je postavio temelje razvoja trigonometrije. [9]

### **2.3. MATEMATIKA U SREDNJEM VIJEKU**

Grčki tekstovi su bili uništavani i mnogi grčki matematičari su padali u zaborav, tako se primjerice Euklida poznavalo samo po određenim formulacijama koje je naveo Severin Boetije, ali bez pravih dokaza. On se smatra najvažnijim matematičarom tog razdoblja i utemeljiteljem skolastike i o njegovoj slavi dovoljno govori da se njegova djela smatraju mostom između antike i srednjeg vijeka. Napisao je odsječak o geometriji, a za pomoć mu je poslužilo djelo "*Elementi*" koje je potpisao Euklid. Ujedno je i napisao odsječak o astronomiji na temelju Ptolomejeva "*Almagesta*". Bio je uzor svim matematičarima do kraja 12. stoljeća, ali ne može se reći da je postigao sve što je mogao.

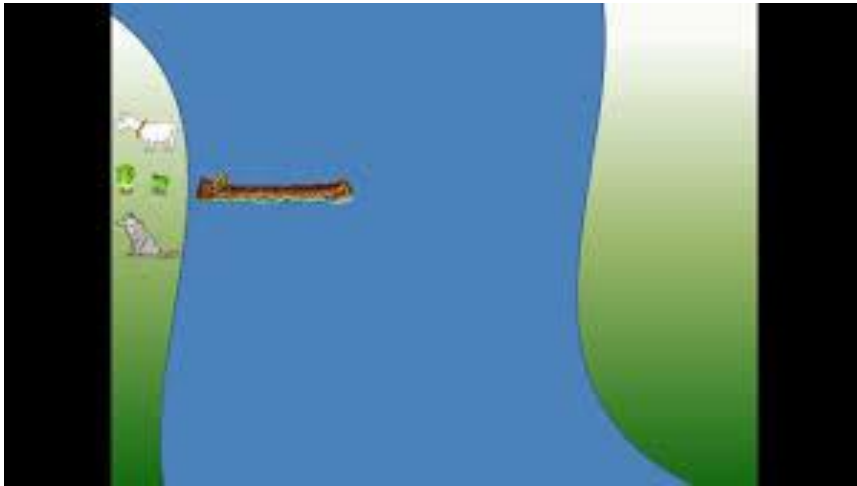
Kako je tada sve više na svijet i na filozofe imao utjecaj kršćanstva, trebalo bi spomenuti Joannesa Filoponosa, matematičara i filozofa koji je živio u Aleksandriji i smatra se da je postavio temelje analize, kritičkog razmišljanja te i same moderne znanosti. Filiponos je kritizirao određene Aristotelove tvrdnje i vjerovanja, a kao najbolji primjer može poslužiti vječnost svemira, gdje Filoponos preispituje tezu o brzini padanja nebeskih tijela koja ne moraju padati istom brzinom.

Tada se govori o razdoblju arapskih osvajanja i treba se spomenuti i Bizant koji je bio pošteđen, te je u Bizantu bila posvećena posebna pažnja na spoju starih grčkih znanja i kršćanske religije.

U to vrijeme su u Italiji živjeli Capella i Boetije, dva velika Talijanska matematičara i filozofa koji su stvorili novi sustav učenja koji je bio prvo baziran na platonizmu, a zatim na neoplatonizmu tako da se aritmetika, geometrija, astronomija i glazba spoje u kvadrivij, zaseban sustav, koji je postao osnova školskog sustava. Na spomen kvadrivija, spominje se i triviji, zbirni naziv za retoriku, dijalektiku i gramatiku koji su činili dio nastavnog programa u školama srednjeg vijeka. Trivij je bio prvi stupanj svake nastave, a kvadrivij drugi stupanj. Zajedno se nazivaju Sedam slobodnih umijeća i taj naziv je koristio Capella pri pisanju enciklopedijskih dijela.

Alcuin iz Yorcka (735. – 804.) sljedeći je učenjak ovog doba i također je studirao u Italiji. Njega je pozvao Karlo Veliki kojem je bio cilj obrazovati pučanstvo. Pisao je o aritmetici, astronomiji, geometriji, a njegovi matematički problemi utjecali su na matematičare u idućih 1000. godina i nalaze se u djelu "*Problemi za izoštavanje uma*" ("*Propositions ad acuendos juvenes*") i ti problemi su najranija kolekcija što matematičkih što logičkih problema, odnosno zadataka. Mnoge zagonetke su poznate i danas i svakako jedna od najpoznatijih je pod nazivom "*Čovjek, vuk, koza i kupus*".

Jedan čovjek, noseći vreću s kupusom, dolazi do obale rijeke zajedno sa vukom i kozom. Čamac je prilično mali, tako da čovjek može prevesti ili samo vuka ili kozu ili vreću sa kupusom. Naravno, on ne smije ostaviti na bilo kojoj obali kozu i kupus, a također ni vuka i kozu zajedno. Kako će čovjek, sa što manje prijelaza preko rijeke, prebaciti vuka, kozu i kupus na suprotnu stranu?



**Slika 3. Čovjek, vuk, koza, kupus [5]**

Ovaj problem može se riješiti na dva načina

1. MG-M-MC-MG-MV-M-MG
2. MG-M-MV-MG-MC-M-MG
3. (M-čovjek, V-vuk, G-koza, C-kupus)

No, nedavna istraživanja su dovela pod sumnju njegovu povezanost sa tom zbirkom zbog rukopisa koji je pronađen, a on datira iz prve polovice 11. stoljeća i smatra se da je napisana ili barem inspirirana od redovnika Ademara iz Aymara koji je rođen 988. godine. Iz Alcuinovih pisama se zna da je on napisao zbirku problema, ali ne postoji nikakav dokaz da je to upravo ta zbirka.

Prilikom Arapskih osvajanja, Arapi su zauzimali mnoga Europska znanstvena središta i škole koje su bile poznate po tradicionalnoj zapadnoeuropskoj znanosti. U njima su se proučavala Platonova učenja i bio je školski sustav na temelju kvadririja i trivija. Rad već spomenutog Boetija u tim školama je bio veoma važan za učenje matematike. Dodir između ovih dviju kultura ponajviše su pogurali i Križarski ratovi, naime poznato je da njima nije bila namjera nikakva znanstvena i kulturna osvajanja, ali Križari su poslužili kao posrednici koji su kasnije svoje priče prepričavali i krali djela koja su napisala arapski matematičari i filozofi, a ta djela su poslije prevodili europski filozofi i znanstvenici. Tu bi valjalo spomenuti Adelarda iz Batha koji je u prvoj polovici 12. stoljeća preveo arapske tablice i Euklidovo djelo "*Elementi*". Treba spomenuti i Hermana iz Dalmacije koji je Ptolomejevo djelo "*Planishaerum*" preveo sa arapskog jezika. To je vrijeme kada su se prevodila djela Ptolomeja, Euklida, Aristotela i drugih, ali su se i arapska djela prevodila na latinski i to je uveliko pripomoglo razvoju matematike.



Jedan od prvih koji je došao u kontakt sa arapskom kulturom i znanostima bio je Gerbert iz Aurillac, francuski redovnik. Stekao je znanje o arapskoj kulturi i pisao je o geometriji, aritmetici i drugim aritmetičkim predmetima i pomoću svog znanja napisao rad "*Pravilo o računanju na abaku*" ("*Regulae de numerorum abaci rationibus*").

Jedan od najvećih židovskih učenjaka bio je Abraham ben Meir ibn Ezra rođen u Toledu. Pisao je o teoriji brojeva, kalendaru, astrolabu, astronomiji te magičnim kalendarima. Napisao je nekoliko radova o brojevima, ali je važno samo istaknuti "*Sefer ha-Mispar*". Temelj joj je indijska aritmetika, no koristi židovska slova za brojeve.

Talijanskog učenjaka Gerarda da Cremonu (1114. – 1187.) također treba spomenuti, on je posvetio svoj život prevođenju starih antičkih zapisa. Zanimala su ga medicina, astronomija i matematika. Zbog ovako velikog posredovanja arapskog jezika, u matematici i u astronomiji, mnogi stručni termini su zapravo izvorno arapski.

Najznačajniji engleski učenjak je zasigurno bio Roger Bacon (1214. – 1294.) poznat kao čovjek od proročke vizije. Bio je vrlo dobro upoznat sa grčkim matematičarima i filozofima, te sa arapskim piscima. Bio je često na udaru kritika zato što nije htio obrazovati pučanstvo, što se tiče matematike i djelovanja na tom području je neznatan.

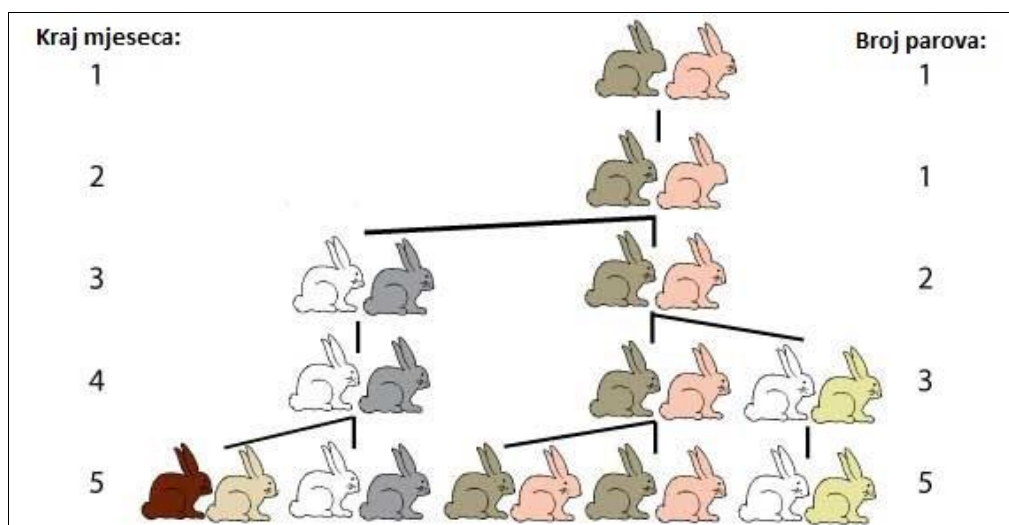
Jordanus de Nemora (1225. – 1260.), njemački je matematičar koji je studirao u Parizu i bio pod utjecajem arapske matematike. Napisao je nekoliko djela među kojima su: "*Aritmetica decem libris demonstrata*", te "*Algorismus demonstratus*", "*Tractatus de sphaera*", rad o matematičkoj astronomiji, rad o geometriji, "*De triangulis*" i jednu od važnijih djela srednjeg vijeka "*O danim brojevima*" ("*Tractatus de numeris datis*"). Trebalo bi posebno istaknuti ovo posljednje djelo i djelo "*Aritmetica*", koja je zbirka aritmetičkih pravila. "*O danim brojevima*" je posebno važno djelo zato što se u njemu pojavljuju opća slova umjesto znamenki brojeva. To je već bilo pronađeno u prethodnim djelima, ali Jordanus je koristio slova koja se koriste i danas. Drugo Jordanusovo djelo, "*Aritmetica*", u kojem govori o aritmetici inspirirano je autorima tog doba, ali i arapskim autorima. Iz svih navedenih primjera može se zaključiti da je arapska matematika uvelike pomogla pri razvoju matematike općenito. Djelo se također sastoji od izračunavanja površine trokuta kao umnožak poluosnovice i visine, te se računa i obujam kugle, obujam drugih tijela i površina kruga.

Među posljednjim istaknutijim matematičarima srednjeg vijeka nalazi se Luca Pacioli (1445. – 1517.) poznat i kao Luca di Borgo, po svom rodnom mjestu. U mladoj dobi odlazi u Veneciju i nakon nekog vremena je napisao algebru koja nikad nije objavljena. Pacioli je poznat

po svom radu *"Sve o aritmetici"* (*"Summa de arithmetica"*), u njoj je uzeo ne samo svoje neobjavljena djela već i opće matematičko znanje tog doba, značajna kompilacija, ali bez imalo originalnosti. Bio je vrlo načitan i koristio je materijale Ptolomeja, Euklida, Jordanusa, Fibonnacija.

Posljednji matematičar vrijedan spomena u srednjem vijeku je Nicolas Chuquet, jedan od najpametnijih Francuza tog razdoblja. Napisao je djelo u kojem je radio sa racionalnim brojevima, iracionalnim, te s teorijom jednažbi.

Putovanja iz europskih država u arapske nisu bila motivirana matematikom već trgovinom, a taj odnos između trgovine i matematike dao je možda i najvećeg i najproduktivnijeg matematičara srednjeg vijeka, sina carinskog službenika koji je mladog Leonarda vodio na svoja putovanja gdje je i Leonardo prvi put došao u doticaj sa arapskom matematikom, te odlučio to znanje prenijeti na europske države. Znanja koja je prikupio sa svih tih putovanja pripomogla su mu u pisanju knjiga i znanstvenih radova. No, njegov najvažniji doprinos europskoj matematici i njenom razvoju bio je širenje Hindu - arapskog brojevnog sustava po cijeloj Europi, a taj sustav izbacio je već tada zastarjeli rimski brojevni sustav i otvorio nove mogućnosti matematičarima prilikom rješavanja matematičkih zadataka i problema. On u svojim djelima nulu koristi kao broj, a razlomke smanjuje na najmanji zajednički nazivnik, objašnjava proporciju brojeva i njenu primjenu. Uz to, Fibonacci otkriva niz koji postaje prvi rekurzivni niz brojeva poznat u Europi. On je tvrdio da se, nakon svake mjesečne generacije, broj parova kunića povećava od 1 do 2, od 2 do 3, od 3 do 5, od 5 do 8, itd., te je prepoznao da niz napreduje dodavanjem prethodna dva broja, odnosno taj niz se može u teoriji produžiti do beskonačnosti. Ovaj teorem postaje poznat kao Fibonaccijev niz brojeva.



Slika 4. Fibonaccijev niz [5]

Pojava tiskarskog stroja uvelike je pripomogla razvoju matematike. Sve više knjiga se tiskalo kako bi se puk što više obrazovao, a jedan od ključnih predmeta je zasigurno bila i matematika.

Matematika i astronomija su bile vrlo usko povezane, stoga su prilikom astronomskih prezentacija, astronomski tekstovi bili popraćeni matematičkim izlaganjima. Ti tekstovi služe za upoznavanje i bolje razumijevanje indijske matematike zbog toga što se u njima tumače matematička pravila. Najpoznatiji matematički zapis koji dolazi iz Indije je Bakšali rukopis, nazvan po mjestu pronalaska i ne zna se točno otkada datira, ali se pretpostavlja 4. stoljeće. Dok su Grci bili zaintrigirani geometrijskom matematikom, Indijci su se više zanimali za aritmetiku i računsku matematiku. Indijsko ime za matematiku, "*ganita*", znači znanost o računanju. Upravo zbog toga Indijci nisu imali problema sa zakrivljenim i ravnim površinama kao što su Grci imali. Indijci su sa svim likovima postupali jednako i mjerili su i jedno i drugo brojevima. Radili su s razlomcima, negativnim brojevima i bili su upoznati sa nulom iako nisu voljeli nju koristiti. [4]

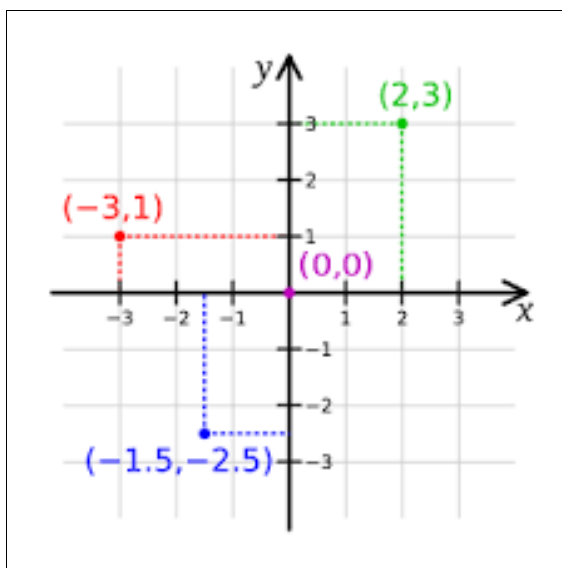
## 2.4. VRHUNAC MATEMATIKE U 17.STOLJEĆU

Rene Descartes ili "*otac moderne filozofije*", osim što je danas jedan od najpoznatijih filozofa u povijesti, uvelike je pridonio razvoju matematike i mnogi ga smatraju začetnikom moderne matematike i analitičke geometrije.

1637. godine objavljuje knjigu, koja podsjeća na nešto što je izgledalo kao današnji udžbenik, pod nazivom "*Govor o metodi*" (franc. "*Discours de la Methode*"), a jedan od njegovih priloga "*Geometrij*" je ostavila neizbrisivi trag u matematici. Koristi mala slova  $a$ ,  $b$ ,  $c$  za poznate veličine, te  $x$ ,  $y$ ,  $z$  za nepoznate veličine.

Prvi je predložio da se svaka točka s dvije dimenzije može opisati s dva broja na ravnini, jedna točka će dati horizontalni položaj, a druga točka će dati vertikalni položaj. Ti položaji su poznati kao Kartezijeve koordinate. Podijelio je površinu na četiri dijela i to mu je omogućilo da prikaže pozitivne i negativne vrijednosti.

Uz to je sveo geometrijske probleme na algebarske i postao osnivač analitičke geometrije. Među prvima je uočio da vrijedi osnovni teorem algebre. U dijelima je koristio terminologiju koja je vrlo slična današnjoj. Znao je Eulerovu formulu, koja ustanovljava da je svaki realni broj  $x$ , te algebarska krivulja trećeg stupnja nosi naziv Descartesov list.



**Slika 5. Kartezijev koordinatni sustav [5]**

$$x^3 + y^3 + axy = 0$$

Blaise Pascal je još jedan istaknuti filozof, matematičar i fizičar ovog vremena, Francuz po kojem je nazvana mjerna jedinica za tlak. Zasnovao je teoriju vjerojatnosti, promatrajući igre na sreću, a prije Gottfrieda Leibniza izveo prvo parcijalno integriranje. Njegova matematička genijalnost došla je do izražaja već u njegovoj 16. godini života, kada je postavio svoj teorem, nazvan Pascalov teorem. Uz to konstruirao je i stroj za zbrajanje, te otkrio opće pravilo djeljivosti svih cijelih brojeva. Njegov stroj (*Pascalina*), mogla je obavljati 4 računske operacije, a mogla je raditi s brojevima do 9 999 999.

Kao fizičar Blaise Pascal je promatrao djelovanja tlaka plina i tekućina, te otkrio da tlak zraka ovisi o temperaturi i vlazi i time je postavio temelje meteorologije.

Njegovo najveće dostignuće na području matematike je Pascalov trokut, tablični prikaz binomnih koeficijenata, gdje je svaki broj, zbroj dvaju brojeva koji su neposredno iznad njega. Binomi imaju samo dva pravila, stoga su jednostavna vrsta algebarskih izraza, a koriste operacije zbrajanja, oduzimanja, množenja i eksponent cijelih brojeva koji glase  $(x + y)^2$ . Ti koeficijenti nastaju kada se binomi prošire u simetrični trokut.

Pascal je otkrio mnoge korisne i zanimljive varijante između redaka, dijagonala i stupaca u nizu brojeva. Npr., gledajući samo dijagonale, nakon vanjske crte od broja 1, slijedeći dijagonale (1, 2, 3, 4, 5, ...) su prirodni brojevi u redu. Slijedeći dijagonalno (1, 3, 6, 10, 15, ...) su triangularni brojevi u nizu. Slijedeći (1, 4, 10, 20, 35, ...) su piramidalni trokutasti brojevi

itd. Također moguće je pronaći Fibonnacijeve brojeve, proste brojeve i mnoge druge nizove unutar Pascalovog trokuta. Problem u teoriji vjerojatnosti je riješio ovaj trokut.

				1																		
				1		1																
				1		2		1														
				1		3		3		1												
				1		4		6		4		1										
				1		5		10		10		5		1								
				1		6		15		20		15		6		1						
				1		7		21		35		35		21		7		1				
				1		8		28		56		70		56		28		8		1		
				1		9		36		84		126		126		84		36		9		1

**Slika 6. Fibonnacijev niz u Pascalovom trokutu [5]**

Isaac Newton bio je Engleski fizičar, matematičar i astronom, te zasigurno jedan od najznačajnijih znanstvenika u povijesti. Newton se smatra jednim od najutjecajnijih i najoriginalnijih teoretičara u povijesti znanosti. Pored otkrića beskonačnosti i nove teorije prirode svjetlosti i boja, postavio je tri zakona kretanja, te i zakon o gravitaciji kojim je temeljito promijenio strukturu fizike. Osnivač je dinamike i prvi je uveo pojam sile.

Jedan od početnih problema s kojima se Newton suočavao bio je kako jednostavno izračunati prosječan nagib krivulje, npr. povećanje brzine nekog objekta na grafu vremena te prijeđenog puta. No, nagib krivulje stalno varira i nije bilo metoda koje daju točan koeficijent smjera za bilo koju točku koja se nalazi na krivulji, odnosno tangentu na koeficijent smjera u toj točki.

Pomoću manjih segmenata krivulje može se približno odrediti nagib na određenoj točki. Kako se segment krivulje koja se gleda približava nuli tako i izračun krivulje dolazi sve bliže točnom mjestu na krivulji.

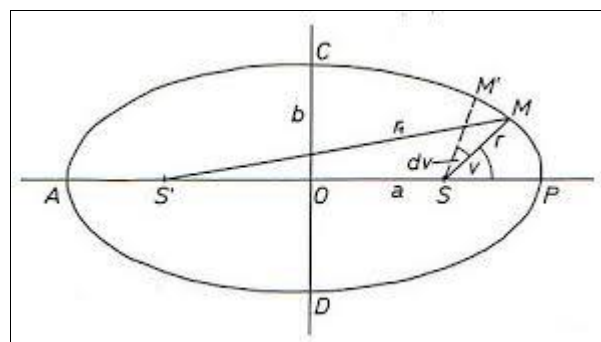
Uz pomoć tih saznanja Newton je samostalno izračunao derivaciju funkcije  $f'(x)$  koja daje koeficijent smjera u bilo kojem trenutku funkcije  $f(x)$ . Ovaj proces izračunavanja koeficijenata smjera, derivacija krivulje ili funkcije naziva se diferencijacija ili diferencijalni račun. U Newtonovoj terminologiji, naziva se metoda *fluxions* –trenutna promjena na nekoj točki na krivulji *fluxion*, a promjenu vrijednosti  $x$  i  $y$  *fluents*. Npr. derivacija ravne linije tipa  $f(x) = 4x$  je 4; derivacija kvadratne funkcije  $f(x) = x^2$  je  $2x$ ; derivacija kubne funkcije  $f(x) = x^3$  je  $3x^2$ .

Suprotno od procesa deriviranja je postupak integriranja, a u Newtonovoj terminologiji metoda *fluents*. Ove dvije metode čine glavne operacije za izračun točaka na krivulji. Integracija se temelji na postupku izračunavanja područja koje se nalazi ispod krivulje, razbijajući ga u beskonačno tanke vertikalne stupce.

Newtonovi temeljni teoremi tvrde da su deriviranje i integriranje dvije inverzne funkcije, stoga, ako je funkcija prvi put integrirana, pa zatim derivirana, ili obratno, dobit će se izvorna funkcija.

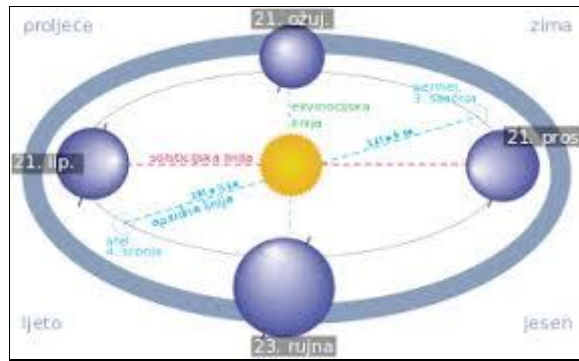
Njemački matematičar, astronom i astrolog, Johannes Kepler, ustanovio je da se planeti gibaju po elipsama, te samim time srušio teorije i vjerovanja da se planeti oko Sunca gibaju po kružnicama, kasnije nazvan Prvi Keplerov zakon. Kepleru je bio problem Mars za kojeg je vjerovao da problem u vezi njega može riješiti u osam dana, ipak trebalo mu je osam godina. Astronomima nije bilo jasno zašto se Mars kreće unatrag po nebeskoj sferi. Čak ni Kopernik nije mogao objasniti ta retrogradna gibanja bez prisustva modela Sunčevog sustava.

Korištenjem detaljnih zapisa koje je napisao Brah, Kepler je shvatio da se planeti kreću u ispruženim krugovima poznatim kao elipsama. Sunce se ne nalazi točno u sredini tih orbita već se nalazi malo sa strane, na jednoj od dvije točke, odnosno u fokusu. Neki planeti poput Zemlje, imaju orbitu koja je vrlo blizu kruga, ali primjerice orbita Marsa jedna je od najvažnijih i najširih elipsa. Prvi Keplerov zakon je upravo zato poznat jer govori o kretanju planeta po tim eliptičnim stazama.



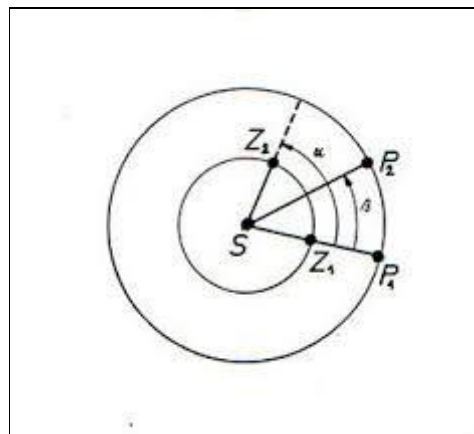
**Slika 7. Prvi Keplerov zakon [9]**

Keplera je mučio i problem brzine planeta i shvatio je što je planet bliže Suncu on će se brže gibati, dok će se planeti koji su udaljeniji od Sunca kretati sporije. Nakon što je shvatio da se planete kreću po elipsama, utvrdio je da se može povući nevidljiva linija koja spaja Sunce i planet te da prekriva jednaku površinu s obzirom na isto vrijeme. Drugi Keplerov zakon glasi da planet u blizini perihela (bliže Suncu) prevali veći put nego u blizini afela (dalje Suncu).



**Slika 8. Drugi Keplerov zakon [9]**

Treći Keplerov zakon tvrdi da je odnos između vremena dva planeta koje im je potrebno da okruže Sunce povezan sa njihovom udaljenosti od Sunca. Stoga, kvadrat omjera razdoblja dvaju planeta jednak je kubu omjera njihovih radijusa. Prva dva zakona više se bave specifičnosti kretanja jednog planeta, dok treći više glasi kao nekakva usporedba između orbita dvaju planeta.



**Slika 9. Treći Keplerov zakon [9]**

## 2.5. SUVREMENA MATEMATIKA

### 2.5.1. Matematika i sport

Matematika i sport su dva vrlo usko povezana područja koja zaokupljaju mnoge sportaše, te matematičare. Upotreba matematike u sportu prisutna je od njenih najranijih početaka i najosnovnijih razina. Kako bi drugačije odredili pobjednika neke utakmice ako se ne prati njen rezultat pomoću brojeva tj. matematike? Također, vrlo je teško odrediti pobjednika u sportovima kao što su bacanje kladiva, atletika, bacanje koplja, stoga se koriste mjerni instrumenti koji opet koriste matematičke operacije pri preciznom rješavanju takve sportske problematike. Praćenje rezultata može biti lakše, odnosno teže, ovisno o kojem se sportu radi,

ali je uvijek nezaobilazna matematika. No, osim osnovne potrebe za pronalaženjem pobjednika, matematika je s vremenom otkrivala sve više detalja vezanih za pojedinca, sportski tim, sudca, itd. Primjerice, tijekom i nakon utakmice, režiser prikazuje mnogo statističkih podataka kao što su broj udaraca na gol, broj prekršaja, broj kartona, broj kornera, postotak posjeda lopte. U zadnjih nekoliko godina moguće je i izračunati koliko je određeni igrač pretrčao kilometara tijekom utakmice. Sportski treneri prije svake utakmice koriste statističke podatke kako bi spremili svoje igrače i kako bi bolje upoznali slabosti, odnosno vrline svojih protivnika. Mnogi sportski gledatelji se jako puno oslanjaju na upravo ono što je rečeno i prikazano statističkim podacima. Statistika često može sakriti nešto, ali ujedno i pomaže pri otkrivanju najboljih i najutjecajnijih sportaša. Inače, daleko najstrastveniji narod što se tiče analiziranja statističkih podataka u korist sporta su Sjedinjene Američke Države.

### **2.5.2. Matematika u ekonomiji**

Proteklo je dosta vremena od prihvaćanja matematičkih metoda u ekonomiji. Primjena matematike bila je rezervirana za prirodne znanosti, ali se, eto, našla i u društvenim - ekonomiji. U svrhu sinergije prirodnih i društvenih znanosti trebalo je izgraditi dobre metodičke postupke, a uzor su im bile prirodne znanosti. Primjena je počela pojavom regresijske i korelacijske analize.

Regresijska analiza odigrala je poprilično veliku ulogu u razvoju matematičkih metoda pomoću kojih su određene mnoge ekonomske zakonitosti. Istraživači su dobili poticaj, nije se više sumnjalo u mogućnost primjene, iako je preciznost manja u ekonomiji nego što je to slučaj u prirodnim znanostima. S obzirom da su matematičke operacije sastavni dio svakog ekonomskog procesa, nije lako točno odrediti matematičku primjenu u ekonomiji. Smatra se da je francuski znanstvenik Kurura (Cournot) prvi započeo matematička istraživanja. U svojim radovima je postavio osnove tzv. ekonometrijskoj znanosti. Kururove formulacije ekonomskih zakonitosti, te ispitivanje odnosa između ponude i potražnje zasnovani na matematičkim principima, imali su velik utjecaj na razvoj ekonomije. Poslije toga dolazi do intenzivnijeg razvoja ekonomsko - matematičke misli.

Sagledavaju se problemi i matematičke formulacije. Nedostajala je konkretna analiza problema, nije se davala pozornost stvarnim empirijskim vrijednostima na temelju kojih bi se odredile relacije, već se davala konkretnim slučajevima. U njima naglasak je bio stavljen na opća promatranja koja su često imala zadaću opisivanja. Pokrenuto je dosta pitanja i uočeno jako puno problema, koji su kasnije uz odgovarajuće dopune riješeni i prihvaćeni u ekonomskoj



analizi kao što su: matematička formulacija uvjeta ravnoteže za veći broj proizvoda, analiza troškova proizvodnje, funkcijski oblik ponude i potražnje, ispitivanje ekstremnih vrijednosti. Razmatraju se problemi tržišta i odnosi cijena.

Svaki problem strukturne prirode u kojem se postavlja zahtjev da se između većeg broja mogućih rješenja odabere ono koje najbolje odgovara pripada matematičko - statističkim problemima.

### **2.5.3. Matematika u medicini**

Tijekom posljednjih 20 godina matematika se pokazala kao važna metoda u stjecanju novih saznanja na području biologije i medicine. Vrlo malen broj liječnika će reći da je matematika osnova novih dostignuća i rezultata u medicinskim znanostima, no činjenica je da je danas značajan napredak medicinskih znanosti omogućen upravo zahvaljujući statistikom, matematičkom disciplinom. Povijesno gledajući, kada su prvi medicinski znanstvenici počeli sa korištenjem matematičkih principa i pravila u obliku teorije vjerojatnosti mnogi su na to odgovarali odbijanjem i otporom. Tada nije bilo moguće niti zamisliti da će se krvne grupe ispitanika promatrati kako bi se pokazala mogućnost razvijanja neke bolesti. Bilo je potrebno gotovo 200 godina kako bi se sve ove nesuglasice riješile i kako bi se matematika počela koristiti u medicini.

Danas se matematika koristi u medicini svakodnevno. Primjerice, kada ljekar pripisuje recept za lijek već koristi matematiku jer recept sadrži način primjene lijeka tj. kolika doza će se uzimati i u kojim vremenskim razmacima. Kada imaju hitni slučaj doktori će morati na brzinu izračunati koliko nekoga lijeka trebaju dati bolesniku ili unesrećenom kako bi mu spasili život.

Korisno je da svatko tko se misli baviti medicinom i medicinskim znanostima u budućnosti, bude vrlo dobro upoznat sa matematikom i njenim primjenama. [6]

### **2.5.4. Matematika kao kraljica znanosti**

Brojevi se mogu pronaći u svemu što ljude okružuje, u svemiru, prirodi, ljudima, te znanstvenim radovima. Svaki oblik nekog tijela ili proces koji se odvija u prirodi definiran je brojevima. Sve ono što se događa u prirodi i njen razvoj ne događa se slučajno. One su u skladu s matematičkim zakonitostima ljepote i harmonije. Sva značajna djela koja je čovjek napravio u povijesti, hramovi, Stonehenge, mnogobrojna remek djela s područja računalne grafike, glazba, književnost i arhitektura u sebi imaju tajnu brojeva. Postoje različita gledišta u vezi

brojeva. Suvremena znanost se bavi propitivanjem je li matematika otkriće ili bi ona postojala neovisno o ljudskom rodu. Tradicija kroz mitove nalaže da su Bogovi dali ljudima brojeve.

Danas je najrasprostranjenija primijenjena matematika. Broj je apstrakcija koja se koristi kako bi se opisao neki objekt. Međutim matematičari i fizičari vidjeli su brojeve na posve drugačiji način. Razmišljali su da je broj nešto puno šire, a sposobnost broja da može vrednovati bila je samo jedna od njegovih funkcija. Njegova mogućnost numeriranja stvari predstavlja samo vanjski aspekt. No, postoji i drugi, unutarnji, dakle funkcionalni aspekt, to jest mogućnost broja da se poveže ili sintetizira i taj se aspekt shvaća kao modul, ideja, zakon. Matematika kao znanost ipak je bila shvaćena kao nešto puno više od mjerenja stvari i količine nečega.

Matematika je nazvana kraljicom svih znanosti i jezikom koje govore sve znanosti. Ona pojašnjava kako funkcionira fizika, objašnjava eksperimentalne rezultate koje dobivaju znanstvenici, pa čak predviđa nove fenomene i ona je temelj za jako puno stvari koje se uzimaju danas. Najdublje tajne se kriju često u stvarima koje se smatraju očiglednim.

### **2.5.5. Statistika**

Danas se matematika jako razvila i ima primjene u mnogo grana, kako prirodnih, tako i društvenih znanosti. Važna grana primijenjene matematike je statistika (stohastička matematika), koja se bavi izučavanjem i predviđanjem slučajnosti i slučajnih pojava. Numerička matematika izučava numeričke metode izračunavanja, a diskretna matematika je zajedničko ime za više grana matematike koja se velikim dijelom koriste kao alati u računarskim znanostima. Razvijena je i matematička teorija računarstva, kao i niz drugih interdisciplinarnih grana.

Neki primjeri korištenja statistike:

1. ispitivanja glasača prije/u tijeku izbora;
2. ispitivanje ljudi općenito o bilo kojoj temi;
3. vođenje statistike u proizvodnji, prije i poslije svake kontrole;
4. primjenjena statistika na području biomedicinskih znanosti (biostatistika);
5. primjenjena statistika u području geoznanosti, odnosno prostorna statistika ili geostatistika.

### 3. MATEMATIKA U OBRAZOVANJU

#### 3.1. MATEMATIKA U OSNOVNOŠKOLSKOM OBRAZOVANJU

Matematiku je vrlo važno učiti od rane dobi. Matematika djetetu pomaže pri zaključivanju, logičkom razmišljanju, sistematičnosti, pa se često, u žargonu kaže kako matematika razvija tj. oštri moždane vijuge. Djeca se već u vrtiću susreću sa brojevima i geometrijskim tijelima, te savladavaju osnovne matematičke operacije kao što su zbrajanje i oduzimanje. Učeći matematiku, djeca razvijaju svoje didaktičke sposobnosti. No, to se ne mora raditi na strogi školski način, već kroz neke igrice tzv. didaktičke igrice. Djeca vole igračke, tu nema nikakvih dvojbi. Iako ih klinci gledaju kao oblik zabave, didaktičke igračke se mogu izabrati tako da uz igru mališani lako savladaju bazično matematičko gradivo potrebno za daljnje školovanje. Valja napomenuti da su didaktičke igračke one igračke koje djecu nečemu poučavaju i obučavaju. Uz matematičku pismenost, iste razvijaju motoriku i govor, vizualnu percepciju koncentracije i pažnje, razvijaju logičko razmišljanje i zaključivanje, aktivno slušanje i sl.



**Slika 10. Didaktička igračka [13]**

Dolaskom djece u osnovne škole, počinju se koristiti malo veći brojevi. Povezivanjem brzog čitanja zadatka iz matematike poboljšava se brzina razmišljanja djeteta kako bi točno i u što kraćem vremenskom roku riješio taj zadatak, poznat kao matematički diktat. Kako djeca postaju starija u ovu priču uključuju se i neka slova, nepoznanice koje učenici moraju pronaći. Učenici uče zbrajati, oduzimati, množiti i dijeliti na početku sa jednoznamenkastim i

dvoznamenkastim brojevima, kasnije se brojevi povećavaju. Uče crtati pravac i dužinu, mjerne jedinice i odnose pravaca u ravnini. Savladavaju vrste kutova (pravi, šiljasti i tupi), mjerenje opsega i površine trokuta, računanje opsega i površine pravokutnika i kvadrata. Kasnije uče računati s razlomcima i decimalnim brojevima (zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje). Pri kraju osnovnoškolskog obrazovanja rješavaju jednadžbe, usvajaju pojam linearne funkcije, pojam vektora, pojam koordinatnog sustava, te prepoznaju geometrijska tijela (računaju volumen i oplošje piramide, prizme, stošca, valjka i kugle). Sve ovo je važno kako bi se učenici znali izražavati pismeno i usmeno. Razvijati osjećaj odgovornosti, kritičnosti prema svome i prema tuđem radu. Naime, programski sadržaj koji uče u osnovnim školama je izrađen tako da učenicima bude jasno da su ova znanja nužna svim učenicima neovisno o izboru njihovog budućeg zanimanja. Bit je razvijati i produbljivati matematičko mišljenje učenika i osposobljavati ih za osmišljavanje i rješavanje raznih praktičkih zadataka.

### **3.2. MATEMATIKA U SREDNJIM ŠKOLAMA**

Dolaskom u srednje škole, učenicima se daju inicijalni ispiti znanja iz svih predmeta pa tako i iz matematike. Plan programa u različitim školama se ne razlikuje toliko, ali u nekim školama gdje je matematika važnija ići će se malo dublje u analizu matematičkih problema i od učenika će se tražiti više.

Matematiku u srednjoj školi je važno učiti jer ona razvija sposobnosti zaključivanja. Trebalo bi biti jasno da se matematika sve više nalazi u prirodi i njena primjena bi trebala biti jasnija, te ju cijeliti za ono što ona je, a to je kraljica znanosti. [2]

Učenici se na početku srednjoškolskog obrazovanja prisjećaju zadataka i lekcija koje su prethodno učili u osnovnim školama. Matematika se uči od temelja i nadograđuje ovisno o struci. Rezultat matematičkog obrazovanja na svim razinama školovanja mora biti razvoj matematičkih sposobnosti i umijeće primijenjene matematike. Razumijevanje temeljnih matematičkih koncepata i procesa te sposobnost njihove praktične primjene je ono što društvena zajednica očekuje od matematičkoga obrazovanja. U osnovnoj školi se uče osnove matematike, u srednjoj školi se dolazi do visoke matematike, a u daljnjem obrazovanju matematičko znanje se nadograđuje ovisno o potrebi struke. Važni su i matematički problemski zadatci riječima koji se spominju u osnovnim školama, ali u srednjim školama ipak su malo ozbiljniji. Njihova problematika raste usporedno s razinom obrazovanja jer razvija logičko zaključivanje i

prepoznatljivost u rješavanju sutrašnjih većih i težih problema. Zadatci riječima česta su pojava na državnim maturama i to je još jedan razlog zašto im učenici trebaju dati malo više pažnje.

U prvom srednje trebaju se svladati osnovna znanja vezana uz realne brojeve u strukturalnom smislu, strogo razlikovati svojstva prirodnih, cijelih, racionalnih i iracionalnih brojeva. Naučiti rješavati linearne jednadžbe, nejednadžbe i probleme prvog stupnja. Snalaziti se u koordinatnom sustavu. Svladati vještinu zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja polinoma i racionalnih funkcija. Uče se operacije s korijenima i potencijama s racionalnim eksponentom. Na kraju prvog srednje, uči se o geometrijskoj ravnini te savladavaju pojmovi vezani uz sukladnost i sličnost. U drugom srednje učenici svladavaju računske operacije s kompleksnim brojevima, uključujući prikazivanje kompleksnih brojeva u ravnini. Trebaju ovladati umijećem rješavanja kvadratne jednadžbe i problemom drugog stupnja. Naučiti svojstva eksponencijalne funkcije i shvatiti njenu vezu sa logaritamskom. Svladati pravila za računanje logaritma. Trigonometrijske funkcije znati primijeniti na rješavanje pravokutnog trokuta te upoznati međusobne odnose točaka, pravaca i ravnina u prostoru. U trećem srednje učenici trebaju naučiti definirati trigonometrijske funkcije kao realne funkcije koristeći brojevu kružnicu te svojstva tih funkcija (periodičnost, parnost i neparnost). Ovladati sposobnošću rješavanja planimetrijskih i stereometrijskih zadataka primjenjujući svojstva trigonometrijskih funkcija kuta te sinusov i kosinusov teorem; rješavati trigonometrijske jednadžbe. Trebaju svladati osnovna znanja iz vektorske algebre. Definirati i crtati krivulje drugog reda na osnovi njihovih metričkih svojstava, a ostale zadaće rješavati na osnovi njihovih pripadnih jednadžbi. U četvrtom srednje učenici moraju svladati osnovna znanja vezana uz skupinu brojeva u strukturalnom smislu, strogo razlikovati svojstva prirodnih, cijelih, racionalnih, realnih i kompleksnih brojeva. Znati razlikovati ograničen i neograničen niz te monotono rastući i monotono padajući niz. Naučiti formule za opći član i sumu aritmetičkog i geometrijskog niza i primijeniti ih u rješavanju zadataka te odrediti sumu beskonačnog geometrijskog niza. Trebaju znati opisati tok, odnosno odrediti područje definicije, nulte točke, područje rasta/pada i nacrtati grafove osnovnih funkcija. Svladati pravila deriviranja i primijeniti derivacije na ispitivanje toka funkcije. Za kraj uče se integrali te veza integrala i primitivnih funkcija.

Program i gradivo matematike se može razlikovati ovisno radi li se strukovnoj, tehničkoj, društvenoj, prirodoslovnoj školi ili ako je u pitanju neka gimnazija.

### 3.3. MATEMATIKA U VISOKOŠKOLSKOM OBRAZOVANJU

Matematiku poneki studenti doživljavaju kao težak, nezanimljiv i apstraktan predmet koji sadrže brojne postupke i formule koje treba naučiti i koji se na kraju ne primjenjuju u svakodnevnom životu. No, tu griješe. Prilikom upisivanja fakulteta, bira se buduće životno zanimanje a isto se opet odabire prema svojim sklonostima. Netko je više naklonjen prirodnim znanostima, netko tehničkim a netko opet društvenim. Sukladno tome studenti će donijeti odluku koji fakultet upisati, imajući na umu što žele postati te koja ih zanimanja zanimaju. Matematika se uči na svakom fakultetu te je teško, gotovo nemoguće, sjetiti se fakulteta na kojem se ona ne spominje. Ona postaje sve zastupljenija i s vremenom sve važnija u svim društvenim aspektima. Apstraktna i teorijska znanja neophodna su za razvoj i nastanak brojnih znanstvenih i tehničkih dostignuća.

Kompjutori kojima se studenti danas najviše vole koristiti upravo su izmislili ljudi, a dijelove kompjutora matematičari zahvaljujući svojoj logici i znanju. Isti su od velike pomoći baš matematičarima i svima onima koji ih primjenjuju. No potrebno je kompjutoru zadati zadatak i znati što se traži od njega da uradi, npr. ako niste upoznati kako se izračunavaju površine nepravilnih likova kako ćete znati da trebate naći formulu za integrale, kako ćete postaviti granice, odnosno kako ćete zatražiti pomoć od kompjutora.

Studenti se uvijek pitaju :“Šta će mi ta matematika?“. No, valja samo pogledati ostale predmete kao i posao koji ih čeka i odgovor je jednostavan. Ona je svugdje oko nas; zastupljena gotovo u svakom predmetu i često nudi upravo rješenje za mnoge zadatke u svakodnevnom životu. Studenti se suočavaju sa mnoštvo problema prilikom studiranja, a često najveći problem je nedostatak vremena te nedovoljno učinkovito učenje. Navike učenja koje su naučene u školi neće se uvijek dobro odraziti na fakultetu. Problemi pojedinca, uz nedostatak vremena, mogu biti i nezainteresiranost za predmet, manjak koncentracije te nedovoljno motivacije za tim predmetom ili izabranim studijem. Vrijeme se može naći, profesor studenta može zainteresirati za predmet, ali motivaciju student mora pronaći sam što zna biti vrlo teško.

Znanja koja se nauče na fakultetu važno je moći primijeniti u praksi, dakle u svakodnevnom životu te ostati u struci za koju su se student/studentica odlučili. Isto tako važno je dobro razmisliti o potražnji te struke prilikom završetka fakulteta kako bi se posao u struci lakše mogao naći.

## 4. ZAŠTO MATEMATIKA PREDSTAVLJA PROBLEM

Prilikom rješavanja osnovnih matematičkih zadataka potrebno je logički razmišljati. Ljudi imaju različite sklonosti a samim tim i različito logičko rasuđivanje. Zbog toga nekome matematika ne predstavlja problem dok drugome predstavlja ogroman gotovo nerješivi problem. Većina ljudi je dovoljno sposobna za shvatiti osnovne elementarne zadatke u matematici. Učenici u osnovnim školama, učenici u srednjim školama, te studenti suočeni su s brdom problema i pravila koje je potrebno znati i razumjeti kako ne bi slušali „nerazumljiv“ jezik. Nije uvijek stvar u tome da oni ne razumiju matematiku, problem je što oni ni ne pokušavaju razumjeti i shvatiti njenu važnost u svakodnevnom životu. Često je problem i slabo predznanje. Matematika se vježba. Ne postoji osoba, naravno ako se govori o prosječnoj inteligenciji, koja vježbajući matematiku istu ne može i naučiti, a to znači da savladano gradivo zna primijeniti. Kada se učenici ili studenti moraju malo ozbiljnije prihvatiti rješavanja problematike tj. zadataka iz nekog dijela matematike, bilo da se radi o analitičkoj, statističkoj, numeričkoj ili nekom drugom nastavnom matematičkom dijelu, pokaže se da su oni studenti koji su se više zalagali i trudili iznimno uspješni na tom području matematike. Tu je pokazatelj dobivena ocjena koja, na žalost, često bude jedini razlog uloženog truda kod određenog učenika ili studenta. Gotovo svaki učitelj ili profesor proživljava sa svojim učenicima ili studentima njihove padove i uspjehe iako to oni često nisu ni svjesni. Naravno da svaki profesor uživa u uspjehu svojih učenika ili studenata. Nema veće sreće za učitelja ili profesora nego da ga njegov učenik ili student nadmaši. To znači, ne samo da mu je uspio prenijeti svoje znanje i zainteresirati ga za isto, nego da ga je potaknuo ka daljnjem obrazovanju i usavršavanju. Uspjeh učenika ili studenta povratna je pozitivna informacija profesoru koji ih je uspio motivirati da dođu do cilja.

Važno je i spomenuti da učenici i studenti veće probleme mogu imati sa elementarnom matematikom nego sa višom matematikom koja bi, naravno, po prirodi trebala biti i teža. Naravno, jer bez dobrog temelja nema ni nadogradnje. Česta je izjava kako je viša matematika zanimljivija i da je zato sa zadovoljstvom svladavaju. S druge strane viša matematika je nekima teža zato što prvenstveno „kaskaju“ s osnovnom matematikom. Viša matematika je nekima teža upravo zato što pokušavaju što prije svladati bazičnu matematiku dok je drugima lakša zato što vide njenu primjenu. Dužom i pravilnijom uporabom matematike, stariji i ozbiljniji ljude vide njenu važnost i opću primjenu.

Profesori prilikom predavanja, trebaju postavljati probleme koji navode učenike/studente na razmišljanja i potiču na usvajanje novih znanja sa kojima će rješavati postavljeni zadatak koristeći matematiku. Problem može biti i kada profesor ne zna predočiti problem jednostavnijim, razumljivijim jezikom ili kada previše otkrije učenicima/studentima jer tada učenici/studenti ili brzo odustaju ili se dovoljno ne angažiraju (problem im je u stvari već profesor riješio). Informacija mora biti jasna sve dok ne rješava problem i da ne oduzima učenicima/studentima mogućnost razmišljanja o situaciji te o metodi koju će izabrati kako bi riješili zadatak koji im je učitelj ili profesor zadao. Problem se stvara ako učenici/studenti ne izvuku pouku, te ako ne uspijevaju povezati stvarne životne probleme sa matematičkom apstrakcijom. Kako bi učenici/studenti lakše riješili problem koji im je zadan, moraju ga razumjeti i imati ideju kako ga riješiti, a kada ga riješe iz istoga izvući zaključak. Kreativnost u ovom slučaju može biti od velike pomoći. [1]

Kada bi se analizirali problemi u matematici prilikom njenog učenja, zasigurno bi se trebalo spomenuti da je možda i najveći problem što djeca već od rane dobi, a ni prilikom odrastanja ne uspijevaju povezati stvarni život sa matematikom. Nastava matematike trebala bi od početka biti osmišljena tako da povezuje tu egzaktnu znanost sa prirodom i društvom, tehnikom i tehnologijom,...

#### **4.1. ZAŠTO DJECA IMAJU PROBLEME PRI UČENJU MATEMATIKE**

Mnoga djeca imaju teškoće pri učenju matematike. Priroda tih teškoća nije kod svakog djeteta ista, jedan učenik često griješi, drugi varira u svojoj uspješnosti. Danas će ići sve kako treba, sutra neće znati riješiti osnovni zadatak, a treći će riješiti uspješno zadatak, ali sporo. Ima učenika koji dugo ne mogu ovladati aritmetičkim i matematičkim vještinama ili nisu u stanju primijeniti usvojena znanja u novim situacijama kada se pojave razna područja matematike, to onda može ići dalje od nemogućnosti rješavanja drugih predmeta pa do toga da se ne nalaze u praktički istim životnim situacijama. Veliki broj djece osjeća odbojnost i strah prema svemu što ih podsjeća na matematiku. Valja se zapitati nisu li i roditelji tome doprinijeli. Ne rijetko se čuje: „... samo mi nemoj iz matematike donijeti jedan...“ ili „Ajme, tko mu je iz matematike?“

Teškoće u učenju matematike su prisutne kod djece različitih intelektualnih sposobnosti, te su skupine učenika koje su neuspješne u njoj vrlo raznolike. Uzroci tih teškoća su mnogobrojni, stoga ne postoji samo jedno objašnjenje zašto djeca imaju problema s učenjem i ne postoji samo jedan put kojim treba ići kako bi se toj djeci pomoglo. Svako dijete ima svoje



jedinstvene probleme koje zahtijeva detaljnu analizu prirode teškoća, njihovih mogućih uzroka, te kada se sazna koji su problemi u učenju treba poraditi na tome. Naravno da učitelj ili nastavnik treba pomoći. Neki učenici mogu bez problema ovladati mehaničkom aritmetikom, ali imaju poteškoća na višim stupnjevima matematike. S druge strane, suprotno ovome, postoje učenici koji vrlo dobro shvaćaju koncepte više matematike, ali nisu u stanju naučiti elementarnu matematiku. Dakle, teškoće u učenju matematike mogu se ispravljati na više različitih načina, ali u slučaju kada djetetu nije pružena pomoć na vrijeme, problemi prelaze u odraslu dob i tek se tada dolazi do bezizlazne situacije.

Problemi mogu biti kada učenici nemaju dovoljno razvijene psihičke funkcije, dakle kada im misli vrlo lako odlutaju tijekom nastavnog sata, kada ne paze dovoljno pri rješavanju zadataka, te kad imaju lošu memoriju u matematičkom smislu.

Djetetova nerazvijenost temeljnih vještina koje su preduvjet za učenje matematike i njeno usvajanje, te kasnija primjena u stvarnom životu ili pak kako bi se lakše naučilo sljedeće gradivo može biti problem. Uzrok ovakvih teškoća može biti nedovoljna pripremljenost djeteta za učenje matematike u školi. Kao što se zna da se prilikom učenja čitanja prvo trebaju znati sva slova, tako postoji i pojam spremnosti prilikom učenja ovog predmeta. Kada dijete prilikom odlaska u školu nije naučilo lekciju od jučer ono je nespremno za današnju matematičku lekciju i ono može izgubiti želju i motiv za njenim učenjem, jer ne može pratiti daljnju nastavu iz matematike. Doslovce trči za propuštenim gradivom, a ako se isto odmah ne nadoknadi već se propušteno gradivo još više nagomila, dijete je u tolikom zaostatku da mu treba ne samo dosta vremena i pomoći oko nadoknađivanja već i motiviranosti i upornosti, a to uistinu nije lako. Zato se propušteno gradivo mora što prije nadoknaditi. Ovaj problem moguće je riješiti sustavnom pomoći nastavnika iz matematike, roditelja i djetetovih prijatelja iz istoga razreda, kao i sa svakom pomoći osobe koja zna prenijeti znanje iz matematike na adekvatan način. Naravno da će doći do povećanog učenja kod kuće tj. do većeg obima domaćih zadataka, ali je to kratkotrajnog roka ukoliko se taj problem na vrijeme uoči i odmah mu se planski pristupi.

Kako je prije rečeno, nijedno dijete ne uči na isti način stoga je vrlo važan i način na koji nastavnik obrađuje lekciju. Nastavnik se drži udžbenika i prati njegov program, nekoj djeci je lakše učiti lekciju za lekcijom na satu, dok druga djeca ipak to ne vole te uče tek kada je obrađena cijela cjelina. To su tzv. kampanjci. No, biti kampanjac u matematici baš i nije preporučljivo upravo zbog prije navedenih razloga.

Svaka matematička vještina kako bi došla do savršenstva treba proći određen razvoj. Da bi dijete potpuno shvatilo koncept zadanog matematičkog problema ne treba biti samo u mogućnosti riješiti taj zadatak, već shvatiti zašto je to tako i objasniti problem zadatka i njegovo rješenje. Profesor Mahesh Sharma, indijski političar i fizičar, je odredio šest stupnjeva kako bi dijete lakše ovladalo matematičkim vještinama i konceptima kroz koje nastavnik ili učitelj treba voditi dijete korak po korak: intuitivni, konkretni, reprezentativni (likovni), apstraktni, upotrebn i komunikacijski. Tek onda kada je dijete sustavno vođeno od prvog koraka do posljednjeg koraka i kada je doseglo posljednji stupanj, komunikacijski stupanj, može se smatrati da je uistinu ovladalo vještinom ili usvojilo koncept. U nerijetkim slučajevima učitelj počinje djeci objašnjavati matematičko gradivo preskačući stupnjeve po kojima bi se trebali držati i zbog te nedosljednosti u metodici podučavanja djeteta čarima matematike, dijete ne usvaja koncept i određene potrebne vještine za daljnje učenje. U jednom trenutku dijete prestaje pratiti na satu, gubi samopouzdanje i na kraju počinje se bojati matematike. Na kraju krajeva, dijete se uvrštava u skupinu djece koji imaju probleme sa učenjem kad to zapravo nije istina, već je problem u metodici podučavanja.

Uzrokom učenikovih problema pri učenju može biti i nedovoljno iskustvo vježbanja matematike. Razlozi tih problema su očiti, izostajanje sa satova, nedovoljno učenje kod kuće. Razlozi mogu biti i drugačiji kao što je u rijetkim slučajevima nastavnikovo vjerovanje da je učenik nespreman za teže gradivo na temelju toga što nije u stanju ispravno riješiti jedan aritmetički problem točno. Ona je po svojoj prirodi kumulativna, stoga postoji čvrsto uvjerenje da je elementarna aritmetika, odnosno brojanje i računanje s brojevima, temelj za svako daljnje napredovanje u matematici. Međutim, ni to ne mora uvijek biti tako, ponekad dijete može vrlo loše baratati s brojevima dok njegovo razmišljanje o zadanom problemu može biti vrlo logično i razumljivo, a na kraju krajeva i točno.

Matematika je „strašna“ zato što su učenici čuli od mnogih da je komplicirana, no kao što se u sve treba uložiti trud kako bi se dobili što bolji rezultati, tako se treba potruditi i kod ovoga predmeta. Pravovremeno i svakodnevno učenje, te praćenje na satu su recept da matematika više nikad ne bude problem. [7]

## 5. EH, TA MATEMATIKA

Svima može ona biti malo neobična, no ona nije tu da bi bila teška već da bi pokazala da može biti zanimljiva i domišljata kroz, upravo, njenu jednostavnost. Svima je poznata priča o mudrom caru i zrnju žita na šahovskoj ploči. Geometrijska progresija, koja matematički neukog čovjeka može zaprepastiti, stvorili su problem Sesine šahovske ploče koji datira iz 1256. godine. Prema legendi, kada je car Šeram naučio igrati šah bio jako ushićen ljepotom te igre da je odlučio nagraditi svog skromnog matematičara Sesa za njegovo otkriće šahovske ploče. Naime, Sesa je rekao: "Želim da mi date za prvo polje na ploči jedno zrno pšenice, za drugo polje dva zrna, za treće četiri, za četvrto osam, i tako za svako sljedeće 2 puta više zrna nego za prethodno polje". Car se iznenadio skromnošću matematičara i odlučio ispuniti obećanje nakon ručka. Dok je Sesa čekao svoju nagradu na dvoru, carevim matematičarima je dva dana trebalo da izračunaju koliko zrna pšenice trebaju dati skromnom Sesi. Izračunali su da taj broj iznosi: 18 446 744 073 709 551 615 zrna. Car se zamislio, jer su mu matematičari rekli da on toliko pšenice u svojim zalihama nema, te da bi se tom količinom pšenice mogli napuniti vagoni koji obavijaju Zemlju 1000 puta. Car je pokušao ispuniti svoje obećanje i pozvao Sesa da sam prebroji koliko zrna pšenice ide njemu, no Sesi je bilo neugodno. Počeo se ispričavati i rekao da ima hitnog posla na drugom kraju svijeta, gdje mu je sestra pred porodom, a muž joj je umro. Car se nasmijao i pustio Sesa da širi glas o milostivosti cara Šerama.

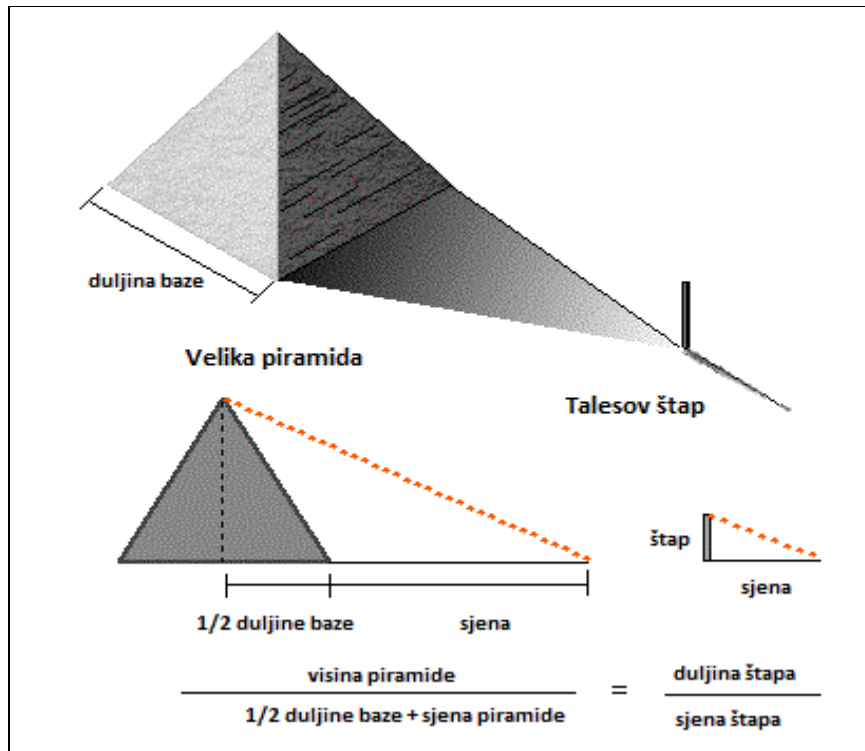
8	$2^{56}$	$2^{57}$	$2^{58}$	$2^{59}$	$2^{60}$	$2^{61}$	$2^{62}$	$2^{63}$
7	$2^{48}$	$2^{49}$	$2^{50}$	$2^{51}$	$2^{52}$	$2^{53}$	$2^{54}$	$2^{55}$
6	$2^{40}$	$2^{41}$	$2^{42}$	$2^{43}$	$2^{44}$	$2^{45}$	$2^{46}$	$2^{47}$
5	$2^{32}$	$2^{33}$	$2^{34}$	$2^{35}$	$2^{36}$	$2^{37}$	$2^{38}$	$2^{39}$
4	$2^{24}$	$2^{25}$	$2^{26}$	$2^{27}$	$2^{28}$	$2^{29}$	$2^{30}$	$2^{31}$
3	$2^{16}$	$2^{17}$	$2^{18}$	$2^{19}$	$2^{20}$	$2^{21}$	$2^{22}$	$2^{23}$
2	$2^8$	$2^9$	$2^{10}$	$2^{11}$	$2^{12}$	$2^{13}$	$2^{14}$	$2^{15}$
1	$2^0$	$2^1$	$2^2$	$2^3$	$2^4$	$2^5$	$2^6$	$2^7$
	a	b	c	d	e	f	g	h

Slika 11. Zrno pšenice i šah [11]

Naime, matematika je usko povezana sa svime što se događa u prirodi i teoreme koji su postavljali mnogi veliki europski matematičari mogu se pronaći baš tamo gdje se nikad ne bi nadali.

Fibonaccijev niz, u kojem je svaki broj zbroj dva prethodna (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610...) može biti pronađen u svemu, .... Npr. suncokret je jedan od najočitijih i najljepših prikaza skrivene matematičke pravilnosti koja oblikuje obrasce života. U ovom slučaju, niz je broj različitih sjemenskih spirala na licu suncokreta. Brojeći spirale u smjeru kazaljke na satu i u obrnutom smjeru, koje dolaze do vanjskog ruba, obično se pronađe par brojeva iz redosljeda: 34 i 55, ili 55 i 89. Pravi život je neuredan i malo kaotičan, znanstvenici su provjerili, istražujući dvije različite studije, 657 cvjetova i našli da 1 od 5 suncokreta nema Fibonaccijev spiralni uzorak, dakle 4 od 5 ih ima, i u drugoj, studija od 557 cvjetova suncokreta je zaključila da 8 od 9 cvjetova savršeno prati Fibonaccijev niz. Naravno, to ne znači da ovaj mali broj ne slijedi niz, već da možda uključuje i uzorke kojih dosad još nisu ni svjesni.

Kada je Tales bio u Egiptu, odlučio je otići vidjeti 3 piramide i sfinagu napola ukopanu u pijesku. Tada su piramide bile stare oko 2000. godina. Angažirao je nekoliko vodiča i sa sobom poveo prijatelja iz Grčke. Tales se dugo divio Keopsovoj piramidi, koja je prekrivala površinu od 5.3 hektara. Gledao je nagib piramide i kako piramida raste do vrha koji siječe egipatsko nebo. Primijetio je kako prekrasna Sunčeva svjetlost udara točno na jednu stranu piramide i crta oštru sijenu na pustinjski pijesak. Tada je postavio svoje poznato pitanje koje glasi: " Kolika je visina piramide". Vodiči su ostali zamišljeni i ušli u međusobnu raspravu jer ih to nikad nitko nije pitao. Uvijek su bili zadovoljni sa bazom piramide, 252 koraka sa svake strane. Nekada to turisti nisu vjerovali pa su znali i sami brojati korake do vrha. Ali, nitko još nije upitao za visinu piramide. No, vodiči nisu znali odgovor na to pitanje, te kako izmjeriti visinu piramide, dok su Tales i njegov prijatelj šetali u hladu, Tales je otkrio odgovor i vikao: "Visina piramide je 160 koraka". Vodiči su bili šokirani i bili su uvjereni da je Tales nekakav čarobnjak. Naravno, Tales nije bio čarobnjak već izuzetno nadaren matematičar koji je jednostavno mjereći dvije sjene na pijesku i koristeći apstraktno pravilo njegove geometrije došao do odgovora. [12]



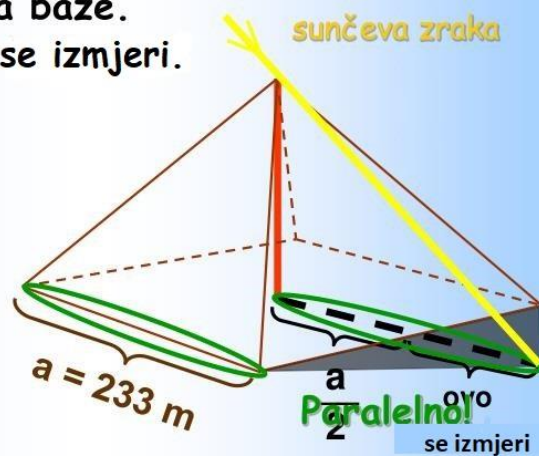
Slika 12. Tales i piramida [12]

Naravno, Tales je riješio i taj problem, možda upravo na ovaj način:

Kako se pomiče sjena piramide (zbog pomicanja Sunca), tako se pomiče i linija (vidi sliku - crno crtkano) koja određuje duljinu sjene.

U onom trenutku kad ta crtkana linija postane paralelna s bridom baze, dio sjene koji je unutar piramide bit će dug kao pola brida baze.

A vanjski dio sjene lako se izmjeri.



Slika 13. Način računanja visine piramide [12]

U svakom trenutku, svi apstraktni trokuti su istog oblika, ali ne i veličine. Pravi kutovi i visine objekata ostali su nepromijenjeni, ali su se druge dvije stranice i druga dva kuta mijenjala ovisno o kretanju Sunca po nebu. Tales je znao da ga oči nisu prevarile. Duljina sjena će se uvijek mijenjati zajedno na isti način, dok će visina objekata ostati nepromijenjena.

Želja za učenjem zasniva se na 4 motiva: motiv radoznalosti, motiv kompetencije, motiv identifikacije, motiv uzajamnog djelovanja. Ta se četiri motiva mogu prepoznati prilikom učenja djeteta u predškolskoj dobi. Svako dijete je po svojoj prirodi vrlo aktivno i razigrano, a upravo ta razigranost proizlazi iz radoznalosti. Učeći djecu matematiku na zabavan način, pričajući priče, može im se pomoći da što prije shvate i sami se uvjere da matematika može biti i te kako zanimljiva.

## 6. ZAKLJUČAK

Matematika je puno više od običnog predmeta zbog toga što logika koja se koristi u ovoj znanosti može poslužiti za smislen pristup rješavanju mnogih drugih problema. Učenje matematike je važno jer ono povećava kognitivne sposobnosti, sposobnosti razumijevanja zadatka, sposobnosti rješavanja tih istih zadataka, te jača logička razmišljanja.

Svaka formula, svaki teorem, svaka matematička funkcija koju studenti ili učenici nauče od velike su važnosti za daljnji razvoj njihovih sposobnosti glede tog predmeta i načina razmišljanja. Tales, Hiparh, Descartes, Newton, Pascal, i još mnogi drugi znanstvenici koji su postavili temelj matematičke znanosti, zauvijek će ostati upamćeni zbog svojih djela koja i danas upoznaju nove naraštaje sa ovom prekrasnom znanostu.

Matematika kao predmet može izgledati jako komplicirano i teško, no matematika je predmet koji, kada se uči pravilno i redovito, može biti vrlo lagan i pristupačan svima, predmet koji ukazuje na usku povezanost sa prirodom i razumijevanje prirode kao takve, jer ipak ona je svuda oko nas, htjeli mi to ili ne.

Nesumnjiva je odgojna vrijednost matematike u izgradnji osobnosti, razvijanju uma, razvijanju logičkog razmišljanja, sposobnosti pri rješavanju zadataka i stvaranju radnih navika.

U ovom radu zadatak je bio pokazati matematiku kakva ona zapravo u suštini i jest, zabavna i zanimljiva u isto vrijeme, te pobliže objasniti važnost te iste matematike i pravovremenog učenja pri ranoj dobi. Matematika nije niti dosadna niti teška upravo zbog toga treba paziti kada se o njoj priča pred novim naraštajima. Novim generacijama treba dopustiti da se oni sami suoče sa njom bez predrasuda te da sami uvide njenu smisao i primjenjivost.

Matematički temelji su postavljeni prije mnogo godina, ali se iz godine u godinu otkriva sve se više novih lema, korolara i teorema koji samo doprinose napredovanju i rasprostranjenosti iste.

I za kraj valja ponoviti ono što je na početku i rečeno a to je da je matematika kraljica svih znanosti. Kao takvu se mora poštivati i trebalo bi je što više razumjeti kako bi usvojeno matematičko znanje predstavljalo važno oruđe u daljnjem životu svakoga čovjeka.

## LITERATURA

- [1] Benček, A.; Marenčić, M.: *Motivacija učenika osnovne škole u nastavi matematike* (Zagreb, 2006.god)
- [2] Buzov, I.: Završni rad: *Moderni pomorac razumije nastanak pomorstva i važnost primjene matematike* (Split, 2017.god)
- [3] Davidson, J.: *Why is math required in college.*  
<https://www.sccc.edu/home/jdavidso/mathadvising/whymath.html> (pristupljeno 9.7.2019.)
- [4] Đikić, S.: *Razvoj matematike u srednjem vijeku*  
<http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/%C4%90IK03.pdf> (pristupljeno 20.6.2019.)
- [5] Ercegović, A.: *Matematičko obrazovanje u Europi*  
<http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/ERG03.pdf> (pristupljeno 20.6.2019.)
- [6] Ilić, I.: *Neki aspekti korištenja matematike u medicini* <https://scindeks-clanci.ceon.rs/data/pdf/0365-4478/2008/0365-44780801052I.pdf> (pristupljeno 28.6.2019.)
- [7] Paponja, I.: *Metode rješavanja problemskih zadataka*  
<https://repozitorij.mathos.hr/islandora/object/mathos%3A44/datastream/PDF/view>  
(pristupljeno 10.7.2019)
- [8] Šuljić, Š.: *Zašto je matematika mnogima bauk ?* <https://www.quora.com/Why-are-some-students-afraid-of-math> (pristupljeno 11.7.2019.)
- [9] Vidić, A.: *Matematika starog vijeka*  
<http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/VID15.pdf> (pristupljeno 20.6.2019)
- [10] <http://e.math.hr/old/egipat/index.html> (pristupljeno 20.6.2019.)
- [11] <https://www.maxportal.hr/naslovna/matematika-legenda-o-mudrom-caru-i-zrnu-zita-na-sahovskoj-ploci/> (pristupljeno 25.7.2019.)
- [12]  
<https://www.google.com/search?q=tales+i+prica+o+piramidi&source=lnms&tbm=isch&sa=X>



[&ved=0ahUKEwi\\_j5DMv7LkAhUU7KYKHRS0Dt4Q\\_AUIESgB&biw=1536&bih=722&dp  
r=1.25](#) (Split, pristupljeno 25.7.2019.)

[13] <https://lafaboo.com/blog/didakticke-igracke-za-djecu-bebe-10/> (pristupljeno 15.2.2020.)

[14] <https://hr.wikipedia.org/wiki/Matematika> (pristupljeno 1.2.2020.)

## POPIS SLIKA

<b>Slika 1. Egipatska piramida [10]</b> .....	5
<b>Slika 2. Računanje površine Egipatskog kuta [10]</b> .....	6
<b>Slika 3. Čovjek, vuk, koza, kupus [5]</b> .....	11
<b>Slika 4. Fibonaccijev niz [5]</b> .....	13
<b>Slika 5. Kartezijev koordinatni sustav [5]</b> .....	15
<b>Slika 6. Fibonaccijev niz u Pascalovom trokutu [5]</b> .....	16
<b>Slika 7. Prvi Keplerov zakon [9]</b> .....	17
<b>Slika 8. Drugi Keplerov zakon [9]</b> .....	18
<b>Slika 9. Treći Keplerov zakon [9]</b> .....	18
<b>Slika 10. Didaktička igračka [13]</b> .....	22
<b>Slika 11. Zrno pšenice i šah [11]</b> .....	30
<b>Slika 12. Tales i piramida [12]</b> .....	32
<b>Slika 13. Način računanja visine piramide [12]</b> .....	32