Funkcije u praktičnim primjerima iz pomorstva

Šore, Roko

SVEUČILIŠTE U SPLITU

POMORSKI FAKULTET U SPLITU

ROKO ŠORE

FUNKCIJE U
PRAKTIČNIM PRIMJERIMA
IZ POMORSTVA

ZAVRŠNI RAD

SPLIT, 2021.

SVEUČILIŠTE U SPLITU

POMORSKI FAKULTET U SPLITU

STUDIJ: POMORSKA NAUTIKA

FUNKCIJE U PRAKTIČNIM PRIMJERIMA IZ POMORSTVA

ZAVRŠNI RAD

MENTOR:

izv. prof. dr. sc. Tatjana Stanivuk

STUDENT:

Roko Šore

(MB: 0275040426)

SPLIT, 2021.

SAŽETAK

Pomorstvo kao djelatnost je skup radnji koje su usko povezane sa morem i brodovima. međutim ono ne uključuje samo plovidbu i navigaciju već povezuje navigaciju, brodogradnju, trgovinu, ekonomiju, menadžment i kompanije. Matematika kao znanost je prisutna u pomorstvu od njegovog početka. Služi za precizne izračune pozicija, opterećenja brodske konstrukcije, izgradnju luka i terminala te još mnogo toga. Cilj ovog rada je pojasniti i prikazati praktičnu primjenu matematičkih funkcija u nekim od svakodnevnih obaveza modernog pomorca. Njihovom primjenom rješavaju se problemi vezani za navigaciju, izgradnju luka i gibanje brodova.

Ključne riječi: *matematika, pomorstvo, funkcije, praktični primjeri*

ABSTRACT

Maritime science as an activity is a set of activities that are closely related to the sea and ships. however, it does not only involve navigation but connects navigation, shipbuilding, trade, economics, management and companies. Mathematics as a science has been present in maritime affairs since its inception. It is used for precise calculations of positions, loads of ship construction, construction of ports and terminals and much more. The aim of this paper is to clarify and present the practical application of mathematical functions in some of the daily duties of a modern seafarer. Their application solves problems related to navigation, port construction and ship movement.

Keywords: *mathematics, maritime affairs, functions, practical examples*

SADRŽAJ

1. UVOD

Pomorstvo je skup svih djelatnosti koje imaju veze s morem. Uvjet postojanja pomorstva su brodovi i drugi plovni objekti koji obavljaju različite poslove od prijevoza robe i putnika morem do održavanja plovnih puteva. Razvoj i napredak pomorstva pratio je razvoj ljudske civilizacije. Laganim razvojem, od prvih plutajućih splavi preko drvenih brodova, došlo se do brodova željeznih konstrukcija dugih i po nekoliko stotina metara.

Jednako su se razvijale znanosti koje su omogućile gradnju stabilnih brodova kakve postoje danas. Fizika, kemija i matematika su znanosti koje su ostavile najveći utjecaj na gradnju brodova. Matematičkim izračunom fizikalnih zakona i njihovom primjenom u praksi, brodovi su se polako unapređivali. U današnje vrijeme matematika ima veliku primjenu u menadžmentu brodarskih kompanija jer svi za cilj imaju isto, a to je što veća zarada.

Završni rad koncipiran je tako da, nakon uvodnog dijela rada, slijedi dio gdje se obrađuje razvoj matematike kao znanstvene discipline. Tu su spomenute najstarije civilizacije svijeta sa svojim otkrićima u matematici te je naglasak stavljen na razvoj matematike u Europi predvođen poznatim matematičarima. Slijedeće tj. treće poglavlje bavi se pomorstvom. Ukratko je opisan razvoj pomorstva kroz povijest od otkrića kompasa do razvoja modernog pomorstva kakvog imamo danas. Četvrto poglavlje rada odnosi se na funkcije. Razumijevanje i način rješavanja funkcija važno je za ovaj rad zbog njihove primjene u pomorstvu.

Matematika je primjenjena u navigaciji od jednostavnih stvari poput zbrajanja i oduzimanja do diferencijalnog i integralnog računa. U četvrtom poglavlju su također primjenom funkcija riješeni praktični primjeri u pomorstvu. Korištenje trigonometrijskih funkcija neophodno je za određivanje pozicije broda u astronomskoj i terestričkoj navigaciji, poznavanje funkcija neophodno je za izgradnju luka i lukobrana, računanja površine ispod krivulje stabiliteta broda, te još u mnogo toga vezano za brod i, općenito, pomorstvo Kroz jednostavne primjere pokazani su izračuni problema uz funkcije te načini njihovog rješavanja.

U posljednjem poglavlju rada dan je kratak osvrt na temu sa zaključcima na isto. Iznesena su i osobna stajališta o pomorstvu, primjeni matematike i funkcija.

2. POVIJEST MATEMATIKE

Matematika je proizašla iz različitih vrsta problema s kojima su se ljudi suočavali kroz povijest. Razvoj matematike može se opisati kao stalno rastući niz apstrakcija. Vjerojatno je prva apstrakcija do koje je čovjek došao broj. Naivna definicija matematike glasi: matematika je znanost o količini i prostoru. Može se također dodati da se matematika bavi i simbolizmom koji se odnosi na količinu i prostor. Ova definicija ima povijesnu osnovu i može poslužiti kao početna.

O matematici se može razmišljati i na jedan drugi način, a to je da je matematika ljudska djelatnost već tisućama godina i svatko je svjesno ili nesvjesno rabi. Uz golemu populaciju koja se pomalo služi matematikom, postoji i malen broj ljudi koji su profesionalni matematičari. Oni primjenjuju matematiku, njeguju je, podučavaju, stvaraju i koriste se njome u mnoštvu situacija.

Matematika se kroz povijest razvijala u svim civilizacijama i na svim područjima na svijetu. Sumerani, stari Grci, Azijske civilizacije, Rimsko carstvo i moderno društvo te sva tehnologija koju koristimo i posjedujemo proizlazi iz neke vrste matematičkih izračuna i problema. Upravo mogućnost rješavanja tih problema matematičkim putem razlog je njenom nezaustavljivom i neprekidnom napretku kroz povijest. [1]

2.1.1. Matematika Sumerana

U Mezopotamiji su Sumerani razvili (seksagezimalni) brojevni sustav. Sačuvane su glinene pločice iz kojih je zamjetljiva matematička nastava. Kao pomoćna sredstva sastavljene su tablice množenja cijelim brojevima i recipročnim vrijednostima cijelih brojeva, tablice kvadrata i kvadratnih korijenova. Drugi korijen od dva odredili su s točnošću koja od prave vrijednosti odstupa tek za jednu milijuntinu. Sumerani su poznavali i aritmetički i geometrijski red. Rješavali su linearne i kvadratne jednadžbe, a među riješenim jednadžbama nalazi se i nekoliko jednadžbi trećeg stupnja.

2.1.2. Matematika starih Grka

Stari Grci su svoja prva matematička znanja preuzeli uglavnom od Egipćana, ali se nisu zadovoljili praktičnom primjenom matematičkih rezultata, nego su se posvetili teorijskom istraživanju. Postavili su zahtjev da svaki zaključak mora biti logički izveden iz određenih postavki.

Pitagora i njegovi učenici otkrili su različita svojstva brojeva, proučavali njihovu djeljivost, poznavali aritmetički red, itd. Rješavajući različite probleme, grčki su matematičari postavili tri klasična problema geometrije: delski problem, kvadraturu kruga i trisekciju kuta. Otkrivene su i proučavane algebarske i transcedentne krivulje. Najvažnije su krivulje drugog reda ili konike, koje je otkrio Menehmo rješavajući delski problem, a teoriju razvio Apolonije iz Perge. Znanost o proporcijama razvio je Euklid, a Demokrit, polazeći od svojeg atomizma, razvio je metodu koju je do savršenstva doveo Arhimed, riješivši pomoću nje velik broj problema koji se danas rješavaju integralnim računom.

Do koje su mjere bila podrobna istraživanja grčkih matematičara najbolje pokazuje to što su dokazali nesumjerljivost stranice kvadrata i njegove dijagonale, čime su otkrili iracionalne brojeve. Sve to dovelo je do pokušaja da se sveukupna matematika svede na osnove najnužnijega (aksiomatska metoda). To je bio i Euklidov cilj u njegovu djelu "Počela" koje je napisano u 13 knjiga, a koje su više od dva tisućljeća bile udžbenici matematike. Treba spomenuti i Eratostena iz Kirene, koji je otkrio Eratostenovo sito, koje je bilo jedini način određivanja primitivnih brojeva tijekom dvaju idućih tisućljeća. Ptolomej i Diofant iz Aleksandrije posljednji su veliki grčki matematičari.

Grci nisu razvili praktičan brojevni sustav, nego su promatranja prenosili u geometrijsku formu.

2.1.3. Počeci matematike u Kini, Indiji i arapskim zemljama

Kineska matematika razvila se u II. i I. stoljeću prije Krista. Kinezi su razvili visoku tehniku računanja, a rješavali su i različite algebarske zadatke. Znali su odrediti drugi i treći korijen, rješavati nejednadžbe, a poznavali su i Pitagorin poučak. Odredili su približnu vrijednost 355/113 za broj π (sedam točnih decimala).

Najznačajniji rezultat razvoja indijske matematike u razdoblju između V. i XII. stoljeća je pozicijski dekadski sustav, omogućen uvođenjem znaka za nulu. Uz to razvijala se algebra, računanje s cijelim brojevima, a ne samo s pozitivnima, tako da su se pri rješavanju jednadžbi uzimale u obzir i pozitivne i negativne vrijednosti korijena, a kao riješenje i iracionalni brojevi.

Razvoj arapske znanosti započeo je prevođenjem grčkih i indijskih spisa, a potom su se pojavili i samostalni arapski radovi. Uzbek Muhamed ibn Musa al-Hvarizmi je prvi izložio algebru kao samostalnu znanost. Arapi su od Indijaca preuzeli i trigonometrijske funkcije sinus i kosinus, ali su uveli i preostale trigonometrijske funkcije i trigonometriju odvojili od astronomije kao samostalnu znanost. Bavili su se i sfernom trigonometrijom (Nasirudin Tusi, XII. st.).

Arapi su povezali dvije različite matematičke misli, grčku i indijsku, i sačuvali su bogato grčko nasljedstvo. Tako je preko Arapa u Europu došla i indijska matematika, a posebno i indijske brojke koje su poznate kao arapske brojske.

2.1.4. Razvoj matematike u Europi

U Europi početak razvoja matematike odvio se u XII. stoljeću. U prvom razdoblju treba istaknuti Cardana, Tartagliu i Ferrarija koji su dali rješenje kubne i bikvadratne jednadžbe. Viete je razvio računanje s općim brojevima i time postao otac moderne algebre. Marin Getaldić bio je Vieteov prijatelj i među prvima je prihvatio računanje s općim brojevima. Otkriće logaritama nastalo je usporednim promatranjem geometrijskog i aritmetičkog niza. Napier je otkrio prirodne logaritme, a Briggs je uveo u upotrebu dekadske logaritme. Time je matematika dobila moćno sredstvo za numeričko računanje. Wallis i Bernoulli su utvrdili da su logaritmi eksponenti, a logaritmiranje jedna od inverznih funkcija potenciranja.

Torricelli, Viviani i Cavaglieri razvili su geometriju, Descartes je utemeljio analitičku geometriju, a P. de Fermat je prvi nakon grčkih matematičara došao do velikih otkrića na području teorije brojeva. Teorijom vjerojatnosti, a također i teorijom brojeva bavio se i Pascal.

Početkom XVIII. stoljeća započelo je istraživanje beskonačnih redova. Tako su se stekle prilike za konačno rješavanje mnogih problema u infinitezimalnom računu, koje su postavili, neovisno jedan o drugome, Newton i Leibniz. Do početka XIX. stoljeća mnogi znameniti matematičari razrađivali su infinitezimalni račun i primjenjivali ga na različite probleme iz prirodnih znanosti. Među novim matematičkim disciplinama pojavile su se diferencijalna geometrija, diferencijalne jednadžbe i račun varijacija. U tom su se razdoblju istaknuli: L`Hopital, Euler i Laplace.

U XIX. stoljeću Cauchy je postavio temelje teorije funkcija kompleksne varijable. Gauss je razvio diferencijalnu geometriju ploha te postavio temelje moderne teorije brojeva. Stari problem Euklidova aksioma o paralelama riješili su Lobačevski i Bolyai dokazavši da se i bez tog aksioma može izvesti jedna nova geometrija – ne euklidska geometrija. Hilbert je dao popis aksioma koji su dovoljni za osnivanje geometrije.

U XX. stoljeću Cartan i Weyl razvijaju teoriju grupa, koja postaje izvor brojnih metoda koje se primjenjuju u matematičkoj fizici, računalnoj tehnologiji i dr.

2.1.5. Matematika danas

Može se postaviti pitanje koliko je danas matematike poznato? Koji je to red veličine? Neki kažu da bi današnje matematičko znanje stalo u otprilike 60000 svezaka prosječne veličine. Drugi tvrde da je toga još više.

Naime, matematika se često prikazuje kao snažno stablo s korijenjem, deblom, granama i grančicama označenim prema pojedinim disciplinama. To je stablo koje stalno raste! Upravo zbog toga je i nemjerljivo. Konstrukcije se povećavaju i popunjavaju, stvaraju se nove teorije, uvode se novi objekti, pronalaze se novi međuodnosi i time ističu nove cjeline.

Između ostalog matematika se bavi proučavanjem količina, struktura, prostora i promjena. Količinama se uglavnom opisuju brojevi, a strukturama se bave kombinatorika, teorija brojeva i teorija grupa. Proučavanje prostora počelo je trigonometrijom i geometrijom, a danas obuhvaća, između ostalog, topologiju i fraktalnu geometriju. Proučavanje promjena bilo je potaknuto fizikom. Jedan od osnovnih pojmova u fizici je gibanje čijim se razmatranjem došlo do infinitezimalnog računa (derivacija i integrala) te diferencijalnih jednadžbi.

Konačno, danas postoje mnoge grane primijenjene matematike gdje se matematički alati koriste za rješavanje konkretnih problema u znanosti, poslovanju, kao i u mnogim drugim i nadasve različitim disciplinama.

3. POMORSTVO

Pomorstvo, u širem smislu, skup djelatnosti, vještina i društvenih odnosa na moru ili u vezi s morem. Pomorstvo obuhvaća pomorsko gospodarstvo, djelatnosti koje iskorištavaju more ili morsko bogatstvo ili su u izravnoj vezi s tim djelatnostima (npr. brodarstvo, ribarstvo, podmorsko rudarenje, primorski turizam i hotelijerstvo, pomorska špedicija, pomorska agencija, opskrbljivanje brodova, prekomorska trgovina, pomorska brodogradnja); i neprivredne djelatnosti (obrazovne, znanstvenoistraživačke, zdravstvene, kulturne, športske, djelatnosti ratne mornarice itd.). U sklop pomorstva ulaze i organizacije (institucije i ustanove) pomorskog školstva, pomorskih instituta i drugih pomorskih znanstvenoistraživačkih centara, pomorskih (lučkih) kapetanija, obalnih straža, pomorskog zdravstva, pomorske kulture (materijalne i duhovne), itd. Pojam pomorstva u širem smislu također obuhvaća osobe i sredstva za rad koja služe pomorskim djelatnostima. – U užem smislu, pomorstvo označava pomorske vještine, posebno upravljanje i manevriranje brodom, rukovanje brodskom opremom i teretom.

3.1. POVIJEST POMORSTVA

Postoje mnoge naznake o tome kada se počelo razvijati pomorstvo, ali ono što je jedino sigurno jeste da se razvija od samog nastanka čovječanstva i nastaje iz potrebe ljudi da koriste more i obalni prostor. Prema nekim arheološkim nalazima prvi jednostavni čamci nastali su u vremenu neolitika.

Kronološki razvoj pomorstva može se podijeliti u četiri faze: prva faza predstavlja pomorstvo starog vijeka, od prvih početaka do 6. stoljeća; druga faza obuhvaća pomorstvo srednjeg vijeka, od 6. do 15. stoljeća; treća faza je doba velikih geografskih otkrića, od 15. do 19. stoljeća i četvrta faza je suvremeno doba pomorstva od 19. stoljeća do danas.

Prve stare civilizacije koje su razvijale pomorstvo bili su Egipćani, Feničani, Krećani i Grci. Nakon njih znatnu ulogu odigrali su Rimljani koji su jedini u povijesti uspjeli kontrolirati cijelo Sredozemlje. Tada započinje razvoj pomorske trgovine, brodogradnje i ribarstva, a najutjecajnija luka tog doba bila je Aleksandrija. U starom vijeku postojali su trgovački brodovi koji su se kretali uz pomoć snage vjetra te ratni brodovi koji su pokretani veslima.

Tijekom srednjeg vijeka, a osobito nakon otkrića kompasa, pomorstvo doživljava procvat. Plovidba se uglavnom temeljila na poznavanju oceanografskih obilježja te geografskih značajki obale uz pomoć portulanskih karata (terestrička navigacija).

Za vrijeme velikih geografskih otkrića težište europskog i svjetskog pomorstva pomiče se sa Sredozemlja na Atlantik. Po svijetu se osnivaju prve portugalske i španjolske kolonije što dovodi do razvoja interkontinentalne veze koja mijenja gospodarsku i društvenu sliku svijeta te potiče velike migracije stanovništva.

Pri samim počecima razvoja pomorstva glavni su ciljevi bili pronaći što kraće i sigurnije pomorske rute te na što pouzdaniji način odrediti geografski položaj i ostale važne komponente orijentacije i navigacije. Jedan od glavnih problema na čijem su rješavanju bili angažirani svi vodeći europski znanstvenici bilo je određivanje geografske dužine s izravnom primjenom u pomorstvu. Ovaj problem je u potpunosti riješen tek nakon što je 1728. godine John Harrison izumio kronometar, sat koji je dovoljno precizan da bi se koristio kao prijenosni vremenski standard na vozilima, u ovome slučaju na brodu.

Veliki napori uloženi su pri pronalasku sjeverozapadnog i sjeveroistočnog prolaza Sjevernim ledenim morem kojima bi se skratila veza između Europe i Dalekog Istoka te pacifičkih obala Sjeverne Amerike.

Iako su spoznaje o geografskim i oceanografskim značajkama novootkrivenih prostora bile znatno veće, temeljna tehnologija pomorskog prometa se nije mijenjala tisućljećima. Osnovno sredstvo bili su brodovi pokretani jedrima.

Industrijska revolucija označena je izgradnjom i primjenom brodova pokretanih na parni pogon. Brodovi na parni pogon postupno zamjenjuju jedrenjake zbog boljih manevarskih sposobnosti i veće nosivosti, a od 1827. primjenjuje se i brodski vijak ili propeler.

Veliko značenje za razvoj pomorstva, kakvo se prepoznaje danas, imalo je prokapanje Sueskog kanala 1869. godine te prokapanje Panamskog kanala 1914. godine.

Parobrodarstvo je omogućilo uspostavljanje redovitih i razmjerno brzih međukontinentalnih veza u putničkom i robnom prometu. Uz slobodnu ili trampersku plovidbu razvija se i linijska plovidba koja posebno utječe na gospodarsko ujedinjenje pojedinih dijelova obale. Veliki napredak ostvaren je i u putničkom pomorskom prometu. U 20. stoljeću brodove na parni pogon postupno zamjenjuju brodovi pokretani dizelskim motorima, a od sredine 20. stoljeća pojedini ratni brodovi i ledolomci pokretani su motorima na nuklearni pogon.

Tijekom 20. stoljeća robni promet naglo raste, a posebno transport sirovina kao što su nafta, ugljen i željezna ruda. Zbog toga se grade sve veći brodovi, posebice tankeri i bulk-carrieri čija nosivost prelazi 500000 dwt.

Danas, kada tehnologija napreduje iz dana u dan, primjenjuju se nove tehnike, razvija se integralni i multimodalni transport, grade se različiti specijalizirani brodovi za prijevoz generalnog tereta (kontejnerski, RO-RO brodovi, LASH brodovi). U skladu s time mijenjaju se i luke i terminali.

3.2. RAZVOJ POMORSKIH LUKA

Prvi moreplovci (Egipćani i Feničani) svoja su skromna plovila nakon dnevne plovidbe izvlačili noću ili u slučaju nevremena na žal. Za takve potrebe bile su dovoljne uvale koje su sa svojim prirodnim oblikom pružale zaštitu od mora. Efikasnijom zaštitom sidrišta, odnosno nagomilavanjem kamenih blokova kako bi se dobila umjetna uvala nastale su prve pomorsko-lučke tvorevine, a s daljnjim porastom veličine plovila, kao i povećanjem količine tereta unutar zaštićenih sidrišta gradile su se obale kako bi se brodovi mogli lakše privezati, ali i zbog lakšeg ukrcaja i iskrcaja tereta. S daljnjim razvojem u lukama su se počeli graditi i drugi sadržaji, poput skladišta, vojnih utvrda, hramova i ostalih monumentalnih oblika. Među prvim pomorskim lukama spominju se sljedeće pomorske luke: Mitilini, Korint, Pirej i Aleksandrija.4 Za vrijeme Rimskog Carstva vidljiva je primjena novih metoda i tehnika građenja luka. U tom su dobu nastale velike morske trgovačke luke, kao što su Ostia, Anzi i dr., dok su Rimljani osim morskih trgovačkih luka gradili i vojne morske luke. U srednjem vijeku razvitak pomorskih aktivnosti nije posebno utjecao na lučke objekte. Za ovo je razdoblje karakteristično kako se polako razvijao promet između sjevernog i istočnog Sredozemlja. Za vrijeme križarskih ratova porasla je trgovina s Istokom, te se istakao pomorski razvoj Venecije i Genoe. Potkraj srednjeg vijeka javlja se potreba za izgradnjom većih luka, jer su Mlečani i Genovljani počeli graditi veće brodove. Upravo su iz tog razloga Mlečani i Genovljani bili prvi graditelji novih luka te su njihov primjer slijedili ostali pomorski narodi.

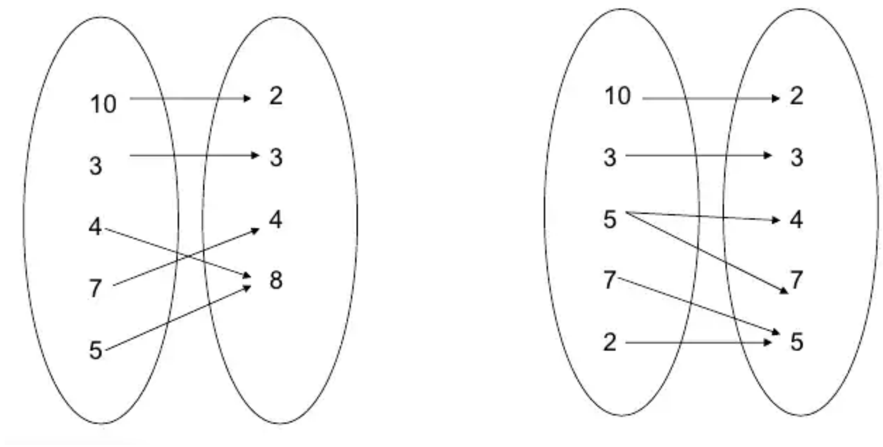
4. FUNKCIJE

Funkcija (preslikavanje, pridruživanje) jedan je od temeljnih matematičkih pojmova. Funkcije su bitan element matematičkog strukturiranja i modeliranja problema (npr. operacije u algebarskim strukturama), kao i sredstvo uspoređivanja tako dobivenih struktura (npr. homomorfizmi struktura). Cijele dijelove matematike možemo razumjeti kao aparat za opis funkcija. Tako je teorija grupa u osnovi teorija grupa transformacija nekog skupa, linearna algebra teorija je linearnih funkcija, matematička analiza teorija je neprekidnih, pogotovo derivabilnih funkcija, teorija diferencijalnih jednadžbi glavni je praktični način za opis funkcija u prirodi i tehnici, ...

Pojam funkcije izražava ideju preslikavanja jednih objekata u druge (npr. operacija zbrajanja preslikava dva broja u njihov zbroj), odnosno ideju *pridruživanja* nekih objekata elementima nekog skupa. Primjerice, svakom proizvodu u trgovini možemo pridružiti njegovu cijenu, svakom danu u tjednu možemo pridružiti njegovo ime, itd. U ovom poglavlju definirat će se funkcije, navesti neka osnovna svojstva te klasični primjeri i podjela funkcija.

4.1. DEFINICIJA I SVOJSTVA FUNKCIJA

Neka su D i K dva neprazna skupa. Svaki postupak (pravilo) f kojim se svakom elementu $x \in D$ pridruži jedinstveni $y \in K$ naziva se funkcija. Pišemo $x \mapsto y$ ili $f(x) = y$. Skup D naziva se domenom (ili područjem definicije), a skup K naziva se kodomenom (ili područjem vrijednosti) funkcije. Dakle, funkcija je zadana svojom domenom, kodomenom i zakonom pridruživanja $x \mapsto f(x)$. Na sljedećoj slici prikazana su dva pridruživanja – prvo pridruživanje jest funkcija jer je svakom elementu domene pridružen jedinstveni element kodomene, no drugo pridruživanje nije funkcija budući da su elementu 5 pridruženi i 4 i 7.



Slika 1. Funkcija (lijevo) i pridruživanje koje nije funkcija (desno) [ref]

Funkcija se može zadati na razne načine:

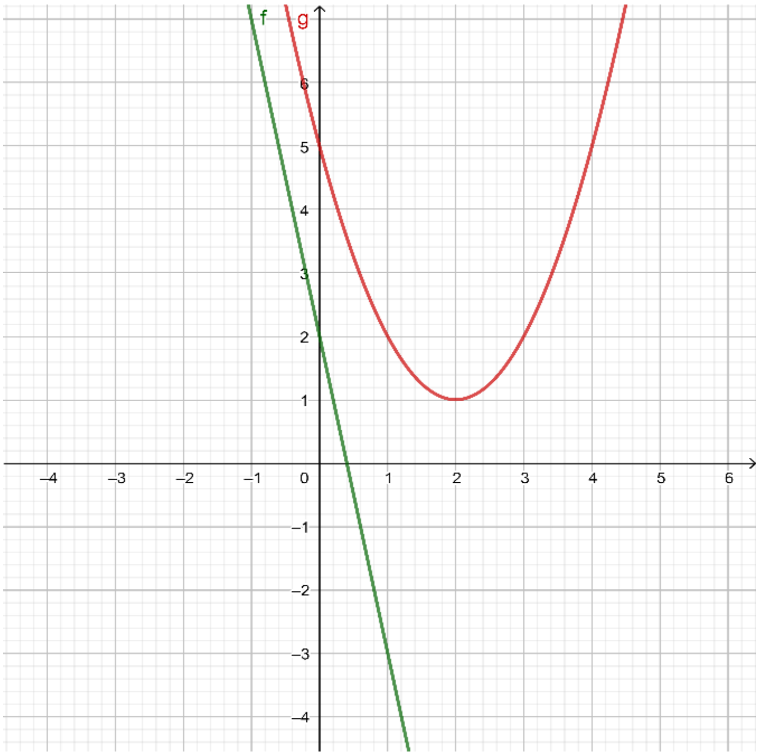
- opisno, tj. navodeći pravilo pridruživanja (primjerice, svakom prirodnom broju pridružuje se njegov sljedbenik ili, svakom proizvodu u trgovini pridružuje se njegova cijena)
- tablično, navodeći vrijednosti ulaznih podataka (argumenata) i funkcijskih vrijednosti (primjerice, u tablicu se, u jedan redak upiše redni broj dana u mjesecu, a u drugi redak prosječna dnevna temperaturu toga dana – time je tablično svakom danu u mjesecu pridružena njegova temperatura)
- analitički, navodeći vezu među varijablama x i y (primjerice, $y = 3x^2 + 2$)
- grafički (prikazujući ovinost varijabli x i y tako da se za svaki x iz domene u koordinatnom sustavu nacrta točka s koordinatama $\big(x, f(x)\big)$)

4.1.1. Graf funkcije

Graf funkcije $f : D \to K$ skup je svih točaka $\big(x, f(x)\big)$, za sve x iz domene D funkcije f, tj.

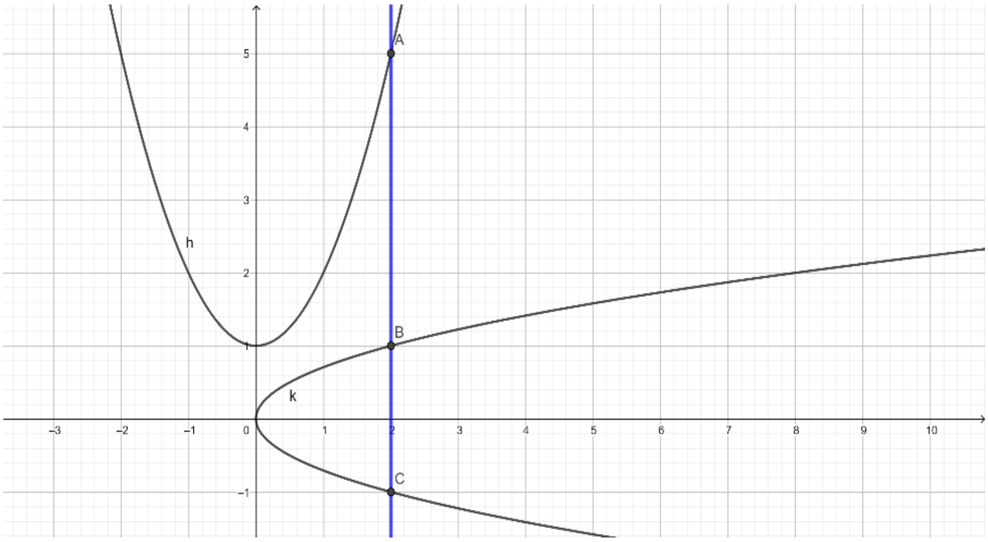
$$\Gamma_f = \{\big(x, f(x)\big) : x \in D\} \tag{1}$$

Primjerice, graf funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadane pravilom $f(x) = -5x + 2$ je pravac, a graf funkcije $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadane pravilom $g(x) = (x-2)^2 + 1$ je parabola.



Slika 2. Grafovi funkcija $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -\mathbf{5}\boldsymbol{x} + \mathbf{2}, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} - \mathbf{2})^2 + \mathbf{1}$

Graf realne funkcije krivulja je u ravnini. Prirodno je postaviti i obratno pitanje – kada je neka krivulja graf neke funkcije, tj. kada za neku krivulju u ravnini postoji realna funkcija kojoj je ta krivulja graf. Također, pitanje je i kako odrediti domenu i pravilo pridruživanja takvog preslikavanja. Valja se prisjetiti … svakom x iz domene mora biti pridružen točno jedan y iz kodomene. To znači da svaki vertikalni pravac p s jednadžbom $x = x_0$ (tj. pravac paralelan osi ordinata) mora sjeći krivulju u najviše jednoj točki. Ukoliko je siječe u točki (x_0, y_0), onda je $x_0 \in D$ i $f(x_0) = y_0$. Ako taj pravac ne siječe krivulju ni u jednoj točki, onda $x_0 \notin D$. Ova provjera naziva se *vertikalni test*. Na sljedećoj slici prikazane su dvije krivulje: h i k. Krivulja h graf je funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$ i ona 'prolazi' vertikalni test – svaki vertikalni pravac siječe je u točno jednoj točki. Krivulja k nije graf neke funkcije budući da ne prolazi vertikalni test – primjerice, vertikalni pravac p s jednadžbom $x = 2$ siječe krivulju k u točkama $A(2,1)$ i $B(2,-1)$.



Slika 3. Vertikalni test

Za modernu matematiku se smatra da se počela razvijati prije otprilike četiri stoljeća zahvaljujući radovima znanstvenika (Kepler, Newton, Galileo, Leibniz), koji su nastojali prodrijeti u zakone fizike. Razvitak matematike slijedio je i razvitak drugih znanosti, a današnjim otkrićima u matematici vrlo često prethode otkrića i teorije u drugim znanostima. Kao neki od mnogih primjera međusobne interakcije s različitim znanostima pokazuje da su matematički korijeni specijalne relativnosti duboko povezani s hiperboličkom geometrijom, teorija prostih brojeva našla je svoju primjenu u kriptografiji, dok su mnoge informatičke tehnologije direktno povezane algoritmima i algebrom. Danas je suvremena matematika prilično napredna i povezana drugim znanostima, a ljudi koji se bave matematikom su usko specijalizirani.

4.1.2. Injektivnost, surjektivnost, bijektivnost

Funkcija $f : D \to K$ je **injektivna** (**injekcija**) ako za sve $x_1, x_2 \in D$ vrijedi

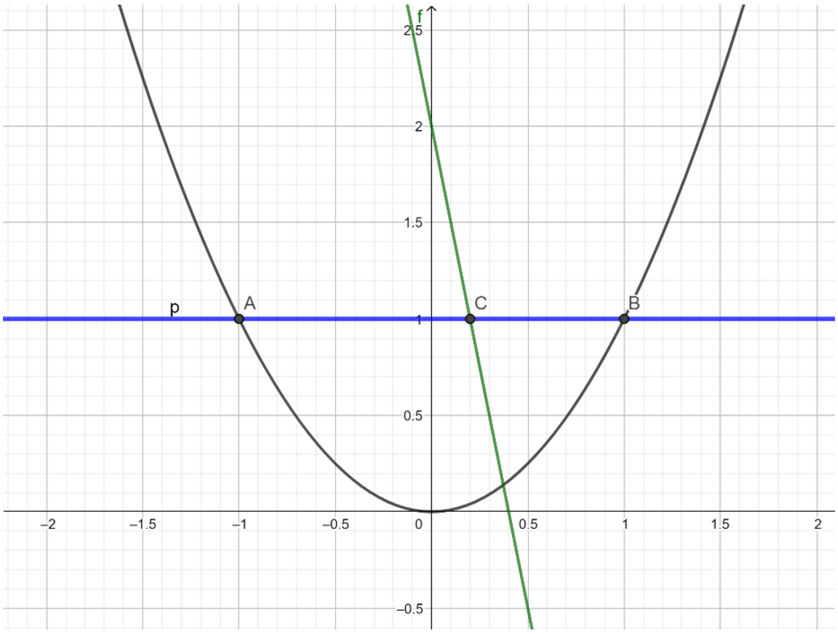
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \tag{2}$$

ili ekvivalentno

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \tag{3}$$

Dakle, funkcija je injekcija ako se različitim brojevima pridružuju različite vrijednosti. Primjerice, funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana pravilom $f(x) = -5x + 2$ je injekcija budući da iz $f(x_1) = f(x_2)$, odnosno $-5x_1 + 2 = -5x_2 + 2$ slijedi $x_1 = x_2$. Sa druge strane, funkcija

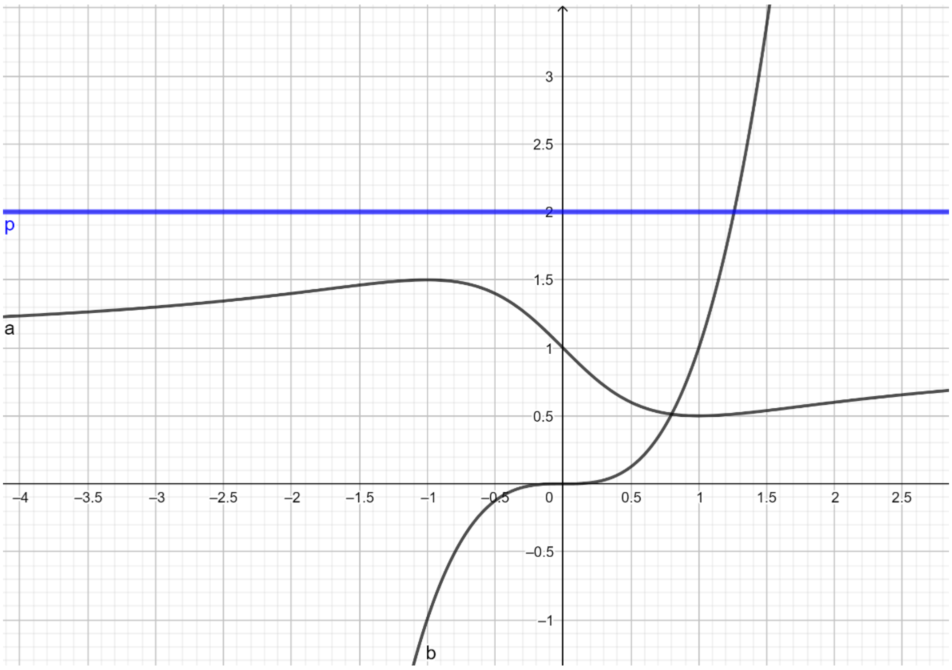
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana pravilom $g(x) = x^2$ nije injekcija budući da iz $g(x_1) = g(x_2)$, odnosno $x_1^2 = x_2^2$ ne slijedi $x_1 = x_2$. Primjerice, $(-3)^2 = 3^2$, ali $-3 \neq 3$.
Iz grafa funkcije lako se može očitati je li ona injekcija ili nije provođenjem tzv. *horizontalnog testa*. Naime, ako je funkcija injekcija, onda će svaki horizontalni pravac p zadan jednadžbom $y = y_0$ sjeći graf funkcije u najviše jednoj točki. Primjerice, pravac p zadan jednadžbom $y = 1$ siječe graf funkcije $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$u dvjema točkama: $A(-1,1), B(1,1)$ pa se i sa slike može zaključiti da se radi o funkciji koja nije injekcija. S druge strane, svaki horizontalni pravac siječe graf funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -5x + 2$ u točno jednoj točki pa se i sa slike može zaključiti da je funkcija f injekcija.



Slika 4. Horizontalni test

Funkcija $f : D \to K$ je **surjektivna** (**surjekcija**) ako se u svaki element kodomene preslika barem jedan element domene, tj. ako za svaki $y \in K$ postoji $x \in D$ takav da je $f(x) = y$. U slučaju surjektivne funkcije, svaki horizontalni pravac p zadan jednadžbom $y = y_0$, gdje je $y_0 \in K$, siječe graf funkcije u barem jednoj točki.
Primjerice, funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -5x + 2$ je surjekcija jer za svaki $y \in \mathbb{R}$ postoji realan broj koji se u njega preslika, to je $x_0 = \frac{2-y}{5}$. Doista, $f\left(\frac{2-y}{5}\right) = -5 \cdot \frac{2-y}{5} + 2 = -2 + y + 2 = y$. S druge strane, funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana pravilom $g(x) = x^2$ nije surjekcija jer za $-5 \in \mathbb{R}$ ne postoji nijedan $x \in \mathbb{R}$ koji se u njega preslika, tj. ne postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $x^2 = -5$.

Funkcija $f : D \to K$ je **bijektivna** (**bijekcija**) ako je i injekcija i surjekcija. To znači da se u svaki element $y_0 \in K$ preslika točno jedan element domene $x_0 \in D$. Primjerice, funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -5x + 2$ je bijekcija budući da je injekcija i surjekcija.
U slučaju bijektivne funkcije, svaki horizontalni pravac p zadan jednadžbom $y = y_0$, gdje je $y_0 \in K$, siječe graf funkcije u točno jednoj točki. Primjerice, funkcija $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a(x) = 1 - \frac{x}{x^2+1}$, nije bijekcija što se može vidjeti sa slike provođenjem horizontalnog testa – horizontalni pravac p zadan jednadžbom $y = 2$ ne siječe graf funkcije (pa ona nije surjekcija, a onda ni bijekcija). Funkcija $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, b(x) = x^3$ je bijekcija što se tkđ. može vidjeti iz horizontalnog testa – svaki horizontalni pravac siječe graf funkcije točno u jednoj točki.



Slika 5. Horizontalni test – ispitivanje bijektivnosti

Ako je funkcija $f : D \to K$ bijekcija, onda za svaki $y \in K$ postoji jedinstveni $x \in D$ takav da je $f(x) = y$. Označi li se, za fiksan y, taj jedinstveni x sa $g(y)$, time je definirana funkcija $g : K \to D, y \mapsto g(y)$, koja se naziva **inverzna funkcija funkcije f** i označava se sa f^{-1}.

4.1.3. Monotonost funkcije

Neka su $D, K \subseteq \mathbb{R}$ neprazni podskupovi skupa realnih brojeva i $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija. Neka je $I \subseteq D$ neki podskup domene funkcije f. Kaže se da je funkcija f **strogo raste** na I ako za sve $x_1, x_2 \in I$ takve da je $x_1 < x_2$ vrijedi $f(x_1) < f(x_2)$, tj. simbolički ako

$$(\forall x_1, x_2 \in I) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \tag{4}$$

Funkcija f **raste** na I ako za sve $x_1, x_2 \in I$ takve da je $x_1 < x_2$ vrijedi $f(x_1) \leq f(x_2)$, tj. simbolički ako

$$(\forall x_1, x_2 \in I) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2), \tag{5}$$

Funkcija f **strogo pada** na I ako za sve $x_1, x_2 \in I$ takve da je $x_1 < x_2$ vrijedi $f(x_1) < f(x_2)$, tj. simbolički ako

$$(\forall x_1, x_2 \in I) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \tag{6}$$

Funkcija f **pada** na I ako za sve $x_1, x_2 \in I$ takve da je $x_1 < x_2$ vrijedi $f(x_1) \leq f(x_2)$, tj. simbolički ako

$$(\forall x_1, x_2 \in I) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2), \tag{7}$$

Funkcija f je **monotona** na I ako je ili rastuća ili padajuća na I.

Primjerice, funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^2$ je strogo padajuća na skupu $I = \langle -\infty, 0]$, a strogo rastuća na $[0, +\infty\rangle$. No, g nije monotona na cijelom $\mathbb{R}$ jer na dijelu domene pada, a na drugom dijelu raste. S druge strane, funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -5x + 2$ strogo pada na $\mathbb{R}$ (na cijeloj domeni).

4.1.4. Ograničenost funkcije

Kaže se da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ **ograničena odozdo** ako postoji broj $m \in \mathbb{R}$ takav da je $m \leq f(x)$, za svaki $x \in D$. Analogno, funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je **ograničena odozgo** ako postoji broj $M \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x) \leq M$, za svaki $x \in D$. Funkcija f je **ograničena** ako je ograničena odozdo i odozgo.

Primjerice, funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^2$ ograničena je odozdo budući da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $0 \leq x^2$, odnosno $0 \leq g(x)$. No, g nije ograničena odozgo. S druge strane, sinus funkcija $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ograničena je budući da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $-1 \leq \sin x \leq 1$.

4.1.5. Parnost funkcije

Za skup $D \subseteq \mathbb{R}$ kaže se da je **simetričan oko 0** ako vrijedi $D = -D$, tj. ako je $D = \{-d : d \in D\}$. Za funkciju $f : D \to K$, pri čemu je D simetričan skup oko 0, kaže se da je **parna** ako je $f(-x) = f(x)$, za svaki $x \in D$, a **neparna** ako je $f(-x) = -f(x)$, za svaki $x \in D$. Graf parne funkcije simetričan je s obzirom na y os, a graf neparne funkcije simetričan je s ozbirom na ishodište.

Primjerice, funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^2$ je parna funkcija budući da je $(-x)^2 = x^2$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Sinus funkcija je neparna funkcija budući da je $\sin(-x) = -\sin x$, za sve $x \in \mathbb{R}$. Postoje funkcije koje nisu niti parne niti neparne, primjerice funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -5x + 2$ nije niti parna niti neparna.

4.1.6. Periodičnost funkcije

Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaže se da je periodična ako postoji $P > 0$ takav da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $f(x) = f(x + P)$. Broj P naziva se **period** funkcije f, a najmanji takav P naziva se **temeljni period** funkcije. Primjerice, funkcija sinus je periodična i temeljni period joj je 2π, dok funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -5x + 2$ nije periodična.

4.2. OSNOVNE ELEMENTARNE FUNKCIJE

Osnovne elementarne funkcije su:

- konstantna funkcija
- opća potencija
- eksponencijalna funkcija
- logaritamska funkcija
- trigonometrijske funkcije
- ciklometrijske funkcije

4.2.1. Konstantna funkcija

Za svaki $c \in \mathbb{R}$ funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x) = c$ naziva se **konstantnom funkcijom**. Njezin graf je horizontalni pravac (tj. paralelan osi apscisa) koji prolazi kroz točku $(0, c)$.

4.2.2. Opća potencija

Za svaki $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definira se funkcija $f : D_r \to \mathbb{R}, D_r \subseteq \mathbb{R}$ izrazom $f(x) = x^r$. Tako definirana funkcija naziva se **općom potencijom**. Budući da izraz x^r nije definiran za sve $x, r \in \mathbb{R}$; domena D_r računa se ovisno o r. Ako je $r \in \mathbb{N}$, onda je $D_r = \mathbb{R}$. Ako je $r \in \mathbb{N}^- = \{-1, -2, -3, \dots\}$, onda je $D_r = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ako je $r = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, onda postoje dva sluačja: ako je n neparan, onda je $D_r = \mathbb{R}$, a ako je n paran, onda je $D_r = [0, +\infty\rangle$. Za ostale $r \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ se razlikuju četiri slučaja: ako je n neparan, onda je za $m > 0$ $D_r = \mathbb{R}$, a za $m < 0$ je $D_r = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; ako je n paran, onda je za $m > 0$ $D_r = [0, +\infty\rangle$, a za $m < 0$ je $D_r = \langle 0, +\infty\rangle$. Ako je r iracionalan broj i $r > 0$, onda je $D_r = [0, +\infty\rangle$, a ako je $r < 0$ iracionalan broj, onda je $D_f = \langle 0, +\infty\rangle$.

4.2.3. Eksponencijalna funkcija

Neka je $a > 0, a \neq 1$ realan broj. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$ definirana s $f(x) = a^x$ naziva se **eksponencijalom funkcijom s bazom $\boldsymbol{a}$**. Za $a \in \langle 0,1\rangle$ eksponencijalna funkcija s bazom a je strogo padajuća, a za $a > 1$ je strogo rastuća.

4.2.4. Logaritamska funkcija

Neka je $a > 0, a \neq 1$ realan broj. Za $y > 0$ postoji jedinstveni $x \in \mathbb{R}$ takav da je $a^x = y$. x se označava sa $\log_a y$ i naziva se logaritmom po bazi a od broja y. Funkcija $f : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}, f(x) = \log_a x$ naziva se **logaritamskom funkcijom s bazom $\boldsymbol{a}$**. Za $a \in \langle 0,1\rangle$ logaritamska funkcija s bazom a je strogo padajuća, a za $a > 1$ je strogo rastuća.

4.2.5. Trigonometrijske i ciklometrijske funkcije

Trigonometrijske funkcije su funkcije koje povezuju kut pravokutnog trokuta s omjerima duljina njegovih stranica. Široko se koriste u svim znanostima vezanim uz geometriju, poput navigacije, mehanike čvrstog tijela, nebeske mehanike, geodezije i mnogih drugih. U ovom radu bit će najviše korištene budući da se baš one najčešće pojavljuju u pomorstvu, pogotovo u terestričkoj i astronomskoj navigaciji. U trigonometrijske funkcije spadaju sinus, kosinus, tangens i kotangens. Inverzne funkcije (restrikcija) ovih funkcija nazivaju se ciklometrijske funkcije – to su arkus sinus, arkus kosinus, arkus tangens i arkus kotangens.

4.3. ELEMENTARNE FUNKCIJE

Elementarne funkcije su

- polinomi
- racionalne funkcije
- algebarske funkcije
- transcendentne funkcije

4.3.1. Polinomi

Neka je $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Funkcija $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s $p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ naziva se **polinom**. Brojevi $a_0, \ldots, a_n$ zovu se koeficijenti polinoma. Ako je $a_n \neq 0$, onda se kaže da je p_n polinom stupnja n, a a_n se naziva vodećim koeficijentom polinoma p_n.

4.3.2. Racionalne funkcije

Racionalne funkcije kvocijenti su dvaju polinoma, pri čemu domena više nije cijeli skup $\mathbb{R}$ budući da je potrebno isključiti one $x \in \mathbb{R}$ za koje je nazivnik jednak 0. Dakle, ako su $p_n, q_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomi i $S = \{x \in \mathbb{R} : q_m(x) \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}$, onda se funkcija $R : S \to \mathbb{R}$, $R(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$ naziva **racionalna funkcija**.

4.3.3. Algebarske funkcije

Algebarske funkcije su elemntarne funkcije koje se dobiju komponiranjem opće potencije s racionalnim eksponentima i racionalne funkcije s racionalnim koeficijentima. Primjerice, funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana pravilom

$$f(x) = \sqrt{\left(\frac{x^2 + 1}{2x^4 + \frac{1}{5}}\right)^8} \tag{8}$$

je algebarska funkcija, dok funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana pravilom $g(x) = (x^4 + 7)^{\sqrt{2}}$ nije algebarska.

4.3.4. Transcendentne funkcije

Transcendentne funkcije su elementarne funkcije koje nisu algebarske. Najvažniji primjeri transcendentnih funkcija su tzv. **hiperbolne funkcije** koje se dobiju pomoću eksponencijalne funkcije kojoj je baza transcendentni broj e. U njih spadaju:

- **sinus hiperbolni**

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{9}$$

- **kosinus hiperbolni**

$$\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{10}$$

- **tangens hiperbolni**

$$\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \tag{11}$$

- **kotangens hiperbolni**

$$\coth : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \tag{12}$$

Inverzne funkcije (restrikcija) hiperbolnih funkcija nazivaju se **area funkcije.**

5. PRAKTIČNI PRIMJERI U POMORSTVU

5.1. NAVIGACIJA

Funkcije koje se najčešće koriste u navigaciji su trigonometrijske funkcije. Istima se rješavaju zadatci u terestričkoj i astronomskoj navigaciji pri određivanju pozicije broda te računanju ortodromske i loksodromske plovidbe u terestričkoj navigaciji.

5.1.1. Terestrička navigacija

Terestrička navigacija zasniva se na opažanju uočljivih prirodnih ili umjetnih objekata na kopnu ili na mjerenju dubine mora. Među umjetne tvorevine ubrajaju se različite optičke oznake sa svjetlima ili bez njih. Prirodne tvorevine su svjetla različitih navigacijskih plutača te kamene, betonske, drvene ili čelične oznake, pričvršćene na morskom dnu ili na obali. Sa vlastitim su osvjetljenjem: pomorska svjetla, svjetionici, brodovi-svjetionici, obalna svjetla, lučka svjetla, svjetleće plutače. Sve te oznake mogu služiti i za označavanje plovnoga puta ili opasnosti. Pridonose sigurnosti plovidbe i olakšavaju orijentaciju na plovidbenom putu. Terestričkim opažanjem nekog objekta dobiva se linija pozicija (stajnica) kao geometrijsko mjesto točaka na kojem se brod nalazi. Linija pozicija može biti pravac, kružnica, hiperbola i krivulja (izobata). Tako se, primjerice, azimut, odnosno pravac kao linija pozicija, dobiva smjeranjem uz pomoć kompasa nekog objekta na kopnu koji je ucrtan na pomorskoj karti. Sjecište najmanje dviju linija pozicija je terestrička pozicija broda.

Matematičke funkcije se koriste pri računanju plovidbe ortodromom i loksodoromom. [6]

ORTODROMA

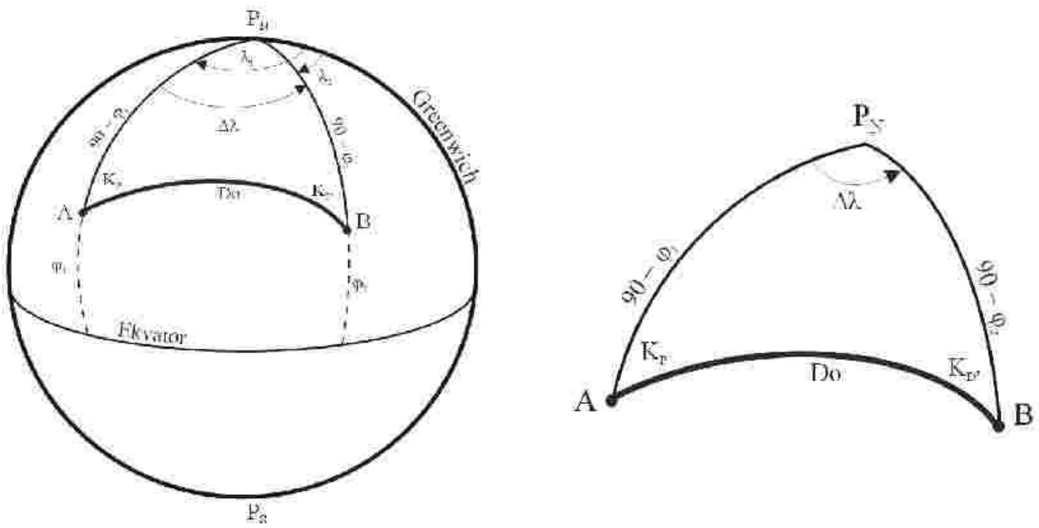
je kraći luk glavne kružnice čija ravnina prolazi pozicijama polaska i dolaska. Razlike između ortodrome i loksodrome mogu se svesti na tri obilježja:

1. Ortodroma je kraći put između dvije točke na površini Zemlje, dok je loksodroma duži put.
2. U vožnji loksodromom nije potrebno mijenjati početni kurs, dok je promjena kursa u vožnji ortodromom česta.
3. Plovidba ortodromom vodi u više geografske širine.

Dok su brodovi bili spori i dok svjetska trgovina nije bila intenzivna kao što je to slučaj u današnje vrijeme, prednost ortodrome kao kraćeg pomorskog puta bila je manje izražena. Međutim povećanjem nosivosti brodova, porastom potrošnje goriva i potrebom za što bržom manipulacijom tereta svako bezrazložno zadržavanje broda postalo je skupo, pa je porasla i važnost najkraćeg puta plovidbe. Ortodrome na sjevernom Atlantiku povezuju luke istočne obale SAD i zapadne Europe. Zbog relativne kratkoće uštede se kreću oko stotinjak nautičkih milja, međutim zbog zalaženja u veće geografske širine plovidbe loksodromom često imaju svoje opravdanje. Ortodrome u srednjem i južnom Atlantiku povezuju luke južne Europe i zapadne Afrike sa lukama sjeverne, srednje i južne Amerike. Zbog niskih geografskih širina uštede nisu posebno velike i iznose do stotinu nautičkih milja. Posebno su značajne ortodromske uštede na sjevernom i južnom Pacifiku. Na tim rutama brodovi u vožnji ortodromom mogu uštedjeti i do 500 NM. Najveće su uštede na ortodromskim pravcima koji iz luka Južne Amerika vode u luke Australije, Novog Zelanda, Indonezije. Tako ortodroma koja povezuje Cap Horn i Sundski kanal vodi po graničnom paralelu 60E južne geografske širine na istok, a ušteda iznosi oko 1300 nautičkih milja. [6]

Analitički model ortodrome

Ortodroma je dio velike kružnice. To je kružnica na površini Zemlje cija ravnina prolazi središtem Zemlje. Velike kružnice su ekvator i svi meridijani, ali ne i paraleli. Sferni trokut može se dobiti ako su sve njegove stranice lukovi velikih kružnica, pa se elementi ortodrome koja je luk velike kružnice mogu rješavati pravilima sferne trigonometrije. [7]



Slika 6. Analitički model ortodrome

Na lijevoj strani slike prikazana je Zemlja sa polovima (P_N i P_S), pozicijama polaska i dolaska (A i B), ekvatorom, meridijanima i ortodromom.

Kao što je poznato geografska širina točke A je luk meridijana od ekvatora do te točke, a geografska širina točke B je luk meridijana od ekvatora do te točke. Budući da od ekvatora do pola ima 90°, to će luk meridijana od pola do točke A imati vrijednost $90° - \upsilon_A$. Isto tako luk meridijana od pola do točke B ima vrijednost $90° - \upsilon_B$. Kut u polu između ova dva meridijana je razlika geografskih dužina točki A i B. Luk velike kružnice koja prolazi točkama A i B je ortodroma, a udaljenost između točki A i B je ortodromska udaljenost između tih točaka (*Do*). Prikloni kut meridijana u točki A je kut između meridijana i uzdužnice broda na samom početku putovanja, prema tome to je kurs na početku putovanja. S obzirom da se tijekom plovidbe po ortodromi kurs neprestano mijenja, ta je veličina određena samo u točki A i u svakoj sljedećoj točki ortodrome ima drugačiji iznos. Zbog toga se ovaj kut može označiti kao početni ortodromski kurs (*Kpč*).

Kod rješavanja problema ortodromske navigacije zadane su koordinate polazne i dolazne pozicije, pa su u ortodromskom sfernom trokutu poznate stranice 90E- ν_A i 90E- ν_B i kut između njih. Ostali početni elementi ortodrome (Do i Kpc) mogu se izračunati pomoću kosinusovog poučka sferne trigonometrije:

$$\begin{aligned}\cos Do = {} & \cos(90° - \sphericalangle A)\cos(90° - \sphericalangle B) \\ & + \sin(90° - \sphericalangle A)\sin(90° - \sphericalangle B)\cos\Delta\lambda\end{aligned} \tag{13}$$

Sređivanjem se dobiva

$$\cos Do = \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 \cdot \cos\Delta\lambda \tag{14}$$

Izraz predstavlja ortodromsku udaljenost između točaka polaska i dolaska u stupnjevima.

Po sinusovom poučku iz trokuta na slici može se dobiti:

$$\frac{\sin Kp\check{c}}{\sin\Delta\lambda} = \frac{\sin(90°E - \upsilon_B)}{\sin Do} \tag{15}$$

Sređivanjem ovaj izraz dobije oblik

$$\frac{\sin Kp\check{c}}{\sin\Delta\lambda} = \frac{\cos \upsilon_B}{\sin Do} \tag{16}$$

odnosno

$$\sin Kp\check{c} = \frac{\cos \sphericalangle B}{\sin Do} \sin \Delta\lambda \tag{17}$$

Na isti načn može se izračunati i vrijednost dolaznog ortodromskog kursa (Kd):

$$\sin Kd = \frac{\cos \sphericalangle A}{\sin Do} \sin \Delta\lambda \tag{18}$$

Međutim, ako je početni ortodromski kurs veći od 90º (ako se vrh ortodrome nalazi izvan plovnog puta) rješavanje početnog i dolaznog kursa sinusovim poučkom može dovesti do zabune pa je te vrijednosti bolje rješavati kosinusovim poučkom:

$$\cos Kp\check{c} = \frac{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_2 \cdot \cos Do}{\sin \varphi_1 \cdot \cos Do} \tag{19}$$

$$\cos kd = \frac{\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2 \cdot \cos Do}{\cos \varphi_2 \cdot \sin Do} \tag{20}$$

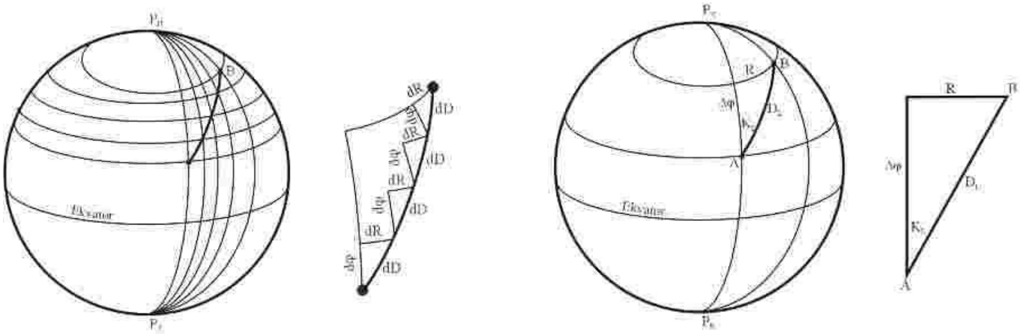
Početni i dolazni ortodromski kurs služe samo kao podatak za računanje ostalih elemenata ortodrome ali ne i za praktičnu plovidbu, jer se iz polazne pozicije do prve međutočke ortodrome plovi u loksodromskom a ne ortodromskom kursu. [6]

LOKSODROMA

je krivulja na površini Zemlje koja sve meridijane siječe pod istim kutom. Osim u posebnim slučajevima ima oblik spirale čije ishodište i završnica teže prema polovima ali ih ne dostižu. Posebni slučajevi loksodrome su ako sjecište krivulje i meridijana iznosi 90°E ili 270°E. U tim slučajevima loksodroma ima oblik kružnice koja se dobije presijecanjem Zemlje ravninom okomitom na polarnu os. Ako je takva kružnica istodobno i glavna kružnica (ako ravnina prolazi središtem kugle), loksodromska krivulja identična je ortodromskoj

Na kraćim putovanjima (do 500 nautičkih milja) elementi loksodrome mogu se računati iz trokuta koji se dobije ako se sa površine Zemlje preslikaju elementi puta: razlika širine, razmak, kurs i udaljenost između dvaju točaka. Za tako male udaljenosti površina Zemlje može se smatrati ravnom pa se svi elementi mogu prikazati u obliku pravokutnog trokuta s hipotenuzom koja predstavlja udaljenost, katetama koje predstavljaju razliku širine i razmak, te kutovima od kojih kut uz meridijan predstavlja kurs. Međusobni odnosi za bilo koji slučaj dobiju se jednostavnim matematičkim relacijama ravne trigonometrije. Ovako konstruiran trokut zove se trokut kursa (slika).

Iz trokuta kursa računaju se svi elementi plovidbe za manje udaljenosti. Kod prvog loksodromskog problema poznata je razlika širina i razlika dužina, a iz tih se podataka računaju kurs i udaljenost. Kod rješavanja drugog loksodromskog problema poznate veličine su kurs i udaljenost a računa se razlika između širina i razmak. Kod oba računa potrebno je pretvarati razmak u razliku geografskih dužina i obratno. [6]



Slika 7. Loksodroma na zemlji kao kugli

Razlika dužina (Δλ) je kraći luk ekvatora između meridijana dviju točki na površini Zemlje, a razmak kraći luk paralele između meridijana dviju točki na njihovoj srednjoj geografskoj širini.

Na donjoj slici na lijevoj strani prikazana je Zemlja u polarnoj stereografskoj projekciji. Veća kružnica predstavlja ekvator, središte kružnice i pol Zemlje, a manja kružnica je paralela na nekoj geografskoj širini. Razlika širina između dva mjesta A i B koja se nalaze na istom paralelu prikazana je lukom ekvatora (Δ φ), a razmak lukom paralele (R). Iz slike se može izračunati dužina tih lukova:

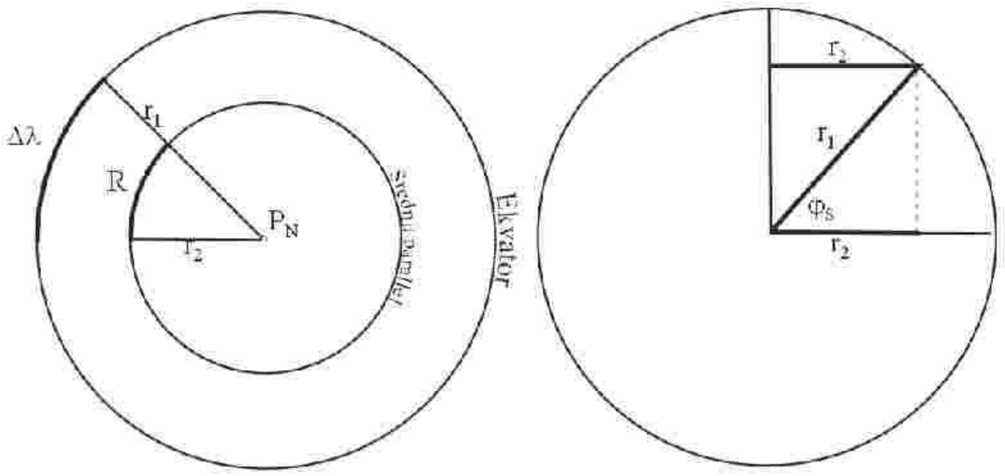
$$\Delta\lambda = \frac{2\pi \cdot r_1 \cdot \alpha}{360°} \tag{21}$$

$$R = \frac{2\pi \cdot r_2 \cdot \alpha}{360°} \tag{22}$$

Ako se gornje dvije jednadžbe međusobno podijele dobije se:

$$\frac{R}{\Delta\lambda} = \frac{r_2}{r_1} \tag{23}$$

Prema tome razlika dužina ($\Delta\lambda$) prema razmaku (R) odnosi se jednako kao polumjer r_1 prema polumjeru r_2.



Slika 8. Odnos ekvatorskog polumjera zemlje

Iz slike je vidljivo da r_1 predstavlja ekvatorski polumjer Zemlje. Odnos između polumjera r_1 i r_2 može se vidjeti iz slike na desnom crtežu koji predstavlja presjek Zemlje. Polumjer r_1 je ekvatorski polumjer Zemlje a r_2 je polumjer male kružnice. Iz slike se vidi da je kut u središtu Zemlje zapravo geografska širina točaka A i B, a matematički odnos polumjera je:

$$\frac{r_2}{r_1} = \cos\varphi \tag{24}$$

Ako se ovo unese u prethodni izraz dobije se:

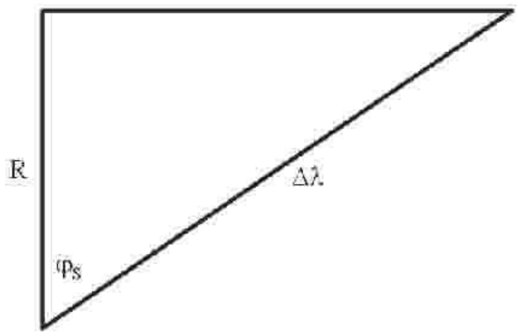
$$\frac{R}{\Delta\,\lambda} = \cos\varphi \tag{25}$$

Kad se mjesta ne nalaze na istoj geografskoj širini u račun se uzima srednja geografska širina pa se razmak i razlika dužina mogu međusobno pretvarati po formulama:

$$\Delta\,\lambda = \frac{R}{\cos\varphi s} \tag{26}$$

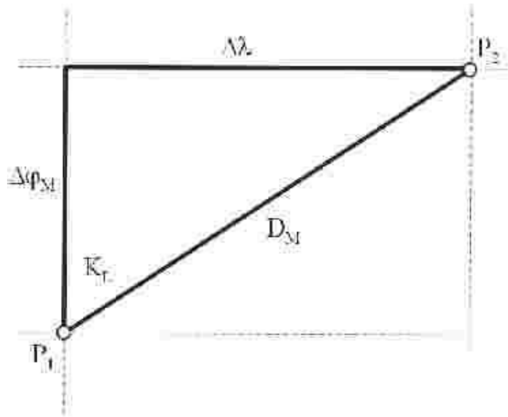
$$R = \Delta\lambda \cdot \cos\varphi_s \tag{27}$$

Iz tih odnosa može se konstruirati trokut koji ima oblik kakav je prikazan na donjoj slici. Takav se trokut zove drugi loksodromski trokut ili trokut srednjih širina.



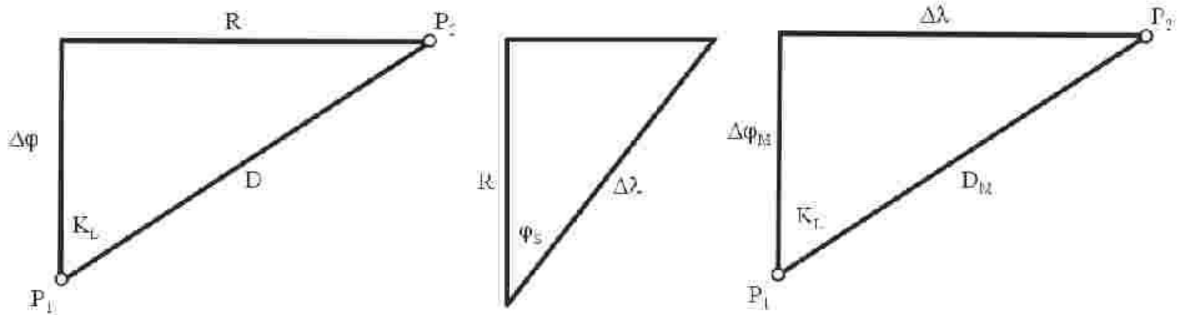
Slika 9. Pravokutni trokut sa stranicama *R* – razmak i Δλ - razlika geografske dužine te kutom φ_s

Za udaljenosti veće od 500 nautičkih milja trokut kursa ne može se zamijeniti ravnim trokutom, pa se problem loksodromske plovidbe rješava na karti Merkatorove projekcije na kojoj je površina Zemlje prikazana u ravnini (slika). [7]



Slika 10. Trokut loksodromske plovidbe za udaljenosti veće od 500 NM

Iz svojstava Merkatorove karte poznato je da je ona konformna (vjerno prikazuje kutove) pa se iz ovog trokuta može računati loksodromski kurs. Loksodromska udaljenost može se izračunati iz prvog loksodromskog trokuta (trokuta kursa), a razlika širina i razmak mogu se računati iz trokuta srednjih širina. Sva tri loksodromska trokuta prikazana su na donjoj slici. [7]



Slika 11. Tri loksodromska trokuta sa lijeva na desno: 1. loksodromski trokut, 2. loksodromski trokut, 3. loksodromski trokut.

Elementi loksodromske plovidbe za udaljenosti veće od 500 NM mogu se izračunavati jedino iz sva tri loksodromska trokuta. [7]

Loksodromski kurs računa se iz Merkatorova trokuta:

$$\tan K_L = \frac{\Delta \lambda}{\Delta \varphi} \tag{28}$$

Razlika geografskih dužina i razmak mogu se računati iz trokuta srednjih širina:

$$\Delta \lambda = \frac{R}{\cos \varphi_2} \tag{29}$$

$$R = \Delta \lambda \cdot \cos \varphi_s \tag{30}$$

Loksodromska udaljenost može se izračunavati iz trokuta kursa. Ako je kurs manji od 87°E loksodromska udaljenost može se izračunati iz razlike geografskih širina:

$$D_L = \frac{\Delta \varphi}{\cos K_L} \tag{31}$$

Ako je loksodromski kurs veći od 87E loksodromska udaljenost može se računati iz razlike geografskih dužina:

$$D_L = \frac{R}{\sin K_L} = \frac{\Delta\,\lambda\ \cdot \cos\varphi_s}{\sin K_L} \tag{32}$$

Matematički je moguće objediniti sve loksodomske trokute preko zajedničkog kuta (K_L). Iz trokuta kursa i Merkatorovog trokuta može se dobiti:

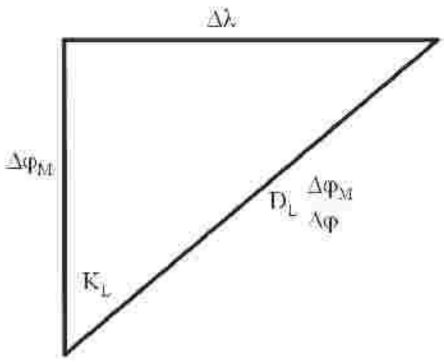
$$\cos K_L = \frac{\Delta\varphi}{D_L} \tag{33}$$

$$\cos K_L = \frac{\Delta\varphi_M}{D_M} \tag{34}$$

Izjednačavanjem, može se odrediti vrijednost hipotenuze u Merkatorovom trokutu izražena loksodromskom udaljenošću (K_L):

$$D_M = D_L \cdot \frac{\Delta\varphi_M}{\Delta\varphi} \tag{35}$$

Zamjenom vrijednosti u Merkatorovom trokutu može se dobiti loksodromski trokut iz kojeg se mogu izračunavati svi elementi loksodromske plovidbe (slika).



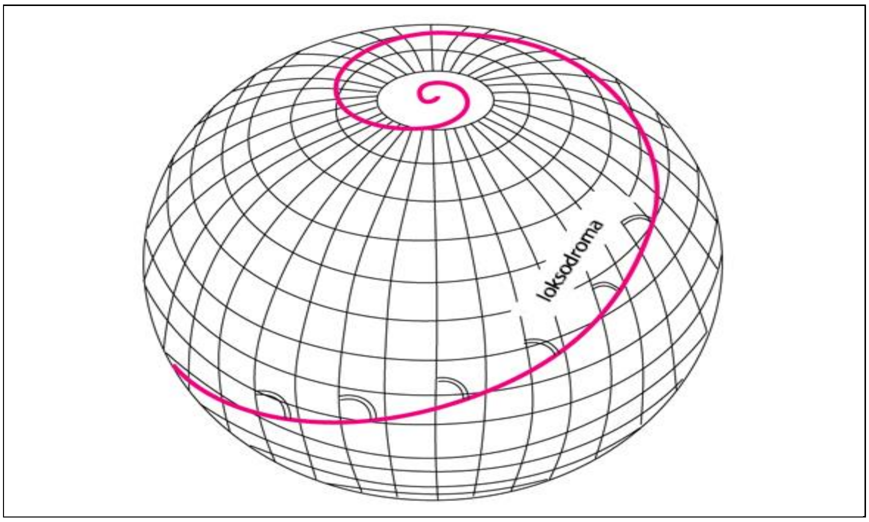
Slika 12. Loksodromski trokut iz kojeg se mogu izračunati svi elementi loksodromske plovidbe

Iz trokuta se može izračunati:

$$\tan K_L = \frac{\Delta \lambda}{\Delta \varphi_M} \tag{36}$$

$$D_L = \frac{\Delta \varphi}{\Delta \varphi_M} \cdot \Delta \lambda \times \sin K_L \tag{37}$$

Kod rješavanja loksodromskih problema potrebno je voditi računa o kvadrantima plovidbe.



Slika 13. Loksodroma na zemljinom sferoidu

Matematički gledano loksodroma je krivulja spiralnog oblika koja se, omotavajući Zemljin elipsoid, približava polu, ali ga nikad ne dostiže. Loksodroma sve meridijane siječe pod istim kutem (slika 12).

5.1.2. Astronomska navigacija

Astronomska navigacija je klasična grana navigacije koja se bavi pitanjima i metodama kako se koristiti nebeskim tijelima za određivanje i kontrolu položaja broda na otvorenom moru. Za uspješno korištenje svih alata i formula u astronomskoj navigaciji neophodno je poznavanje sferne trigonometrije. [3]

Geometrijsko mjesto položaja broda u astronomskoj navigaciji definira se kao kružnica položaja, luk položaja i pravac položaja. Kružnica položaja na Merkatorovoj karti predočuje se krivuljom sličnom elipsi, sinusoidi ili paraboli. Presjek dvaju geometrijskih mjesta (stajnica) sveden na isti trenutak i mjesto daju točku broda. Više od dvije stajnice zatvaraju poligon položaja, tri zatvaraju trokut, četiri četverokut, itd. Teorijski, sve stajnice svedene na isti trenutak i mjesto morale bi se sjeći u jednoj točki, što u praksi nije moguće zbog navigacijskih greški. Metode određivanja astronomskog položaja broda mogu se podijeliti na dvije osnovne skupine tj. na izravne i neizravne metode.

IZRAVNE METODE

Dvije kružnice položaja sijeku se u dvije točke. Jedna od njih je pozicija broda. Zadatak bi se najbrže i najjednostavnije riješio kad bi se mogle te kružnice nacrtati na zemaljski globus. Međutim, to nije praktično (da bi se 1M prikazala duljinom od 1mm, globus bi morao imati promjer oko 7m).

Računski zadatak se svodi na rješavanje sustava jednadžbi:

$$\sin V_1 = \sin\varphi \sin\delta_1 + \cos\varphi \cos\delta_1 \cdot \cos(S_1 + \lambda_E) \tag{39}$$

$$\sin V_2 = \sin\varphi \sin\delta_2 + \cos\varphi \cos\delta_2 \cdot \cos(S_2 + \lambda_E) \tag{40}$$

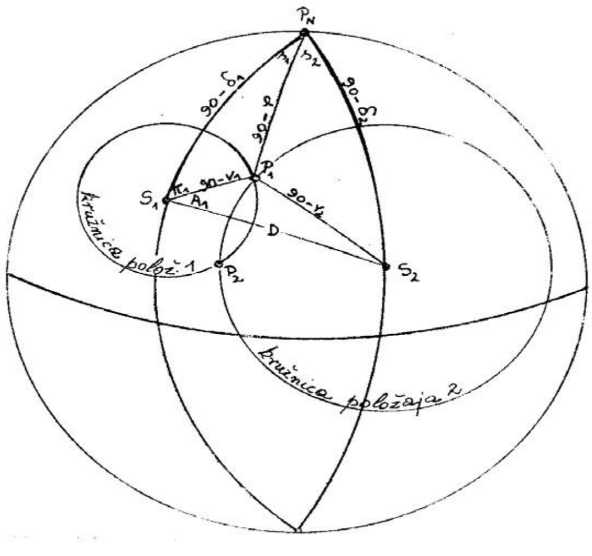
Ovaj sustav trigonometrijskih jednadžbi treba riješiti po nepoznanicama. Postupak je dug i zamršen, pa se ne upotrebljava u praksi. Jedan od načina rješavanja ovog problema dao je Charles T. Dozier (1949. godine):

Neka je položaj opažača određen prema slici dolje:

S_1- terestrička projekcija prvog nebeskog tijela

S_2 - terestrička projekcije drugog nebeskog tijela

$$\begin{aligned}\Delta S = s_1 - s_2 &= S\gamma + \lambda + (360 - \alpha_1) - S\gamma - \lambda - (360 - \alpha_2)\\ &= (360 - \alpha_1) - (360 - \alpha_2)\end{aligned} \tag{41}$$



Slika 14. Dozierova metoda

NEIZRAVNE METODE

Neizravne metode uključuju određivanje pozicije broda motrenjem jednoga ili više nebeskih tijela. Mogu se motriti istovremeno ili u razmaku vremena. A pri korištenju ove metode također je neophodno koristiti i poznavati trigonometrijske funkcije. Zbog opširnosti ovih metoda fokus će biti na samo jedan dio visinske metode računanja stajnica kako bi se prezentiralo korištenje trigonometrijskih funkcija u svakodnevnoj navigaciji. Trigonometrijske funkcije postaju potrebne u trenutku kada se dođe do računanja azimuta i visine računate nekog nebeskog tijela. [3]

$$\sin v_r = \sin\varphi \cdot \sin\delta + \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos s_\gamma \qquad (42)$$

gdje je:

v_r - visina računata

δ - deklinacija nebeskog tijela

φ - zemljopisna širina

s_γ - satni kut nebeskog tijela

Druga formula za izračun azimuta osmotrenog nebeskog tijela glasi:

$$\cos\omega_r = \frac{\sin\delta - (\sin v_r \cdot \sin\varphi)}{\cos v_r \cdot \cos\varphi} \qquad (43)$$

Koristeći ove dvije formule dobiju se podatci neophodni za ucrtavanje stajnica na bijelu kartu i određivanje odnosno kontrolu pozicije broda. Bez korištenja trigonometrijskih funkcija u ovim formulama nebi bilo moguće dobit ova dva ključna podatka te samim time ni izračunati poziciju ovom metodom. [3]

5.2. METEOROLOGIJA

Meteorologija je jedno od najkompliciranijih, ali i najpotrebnijih područja znanosti, te obuhvaća veliki niz čimbenika koji utječu na rezultate dobivene izračunima konačnih stanja u atmosferi. Bez poznavanje meteoroloških prognoza i razumijevanja istih plovidba svjetskim morima i oceanima bi bila znatno otežana. [9]

Sinoptičke karte i svi navigacijski priručnici vezani za meteorologiju, sastavljeni su i izračunati sa podatcima koji su, kroz povijest, prikupljani i obrađivani. Na temelju takvih podataka mogu se napraviti izračuni i predviđanja kakve se vremenske prilike očekuju na određenim dijelovima svijeta. [9] Tako se npr. može znati kada su sezone monsuna, može se predvidjeti kretanje i brzinu ciklona, računati prosječna količina padalina, ...

Zbog teme ovog rada za primjer će biti pokazana statistička kontrola podataka između dvije susjedne meteorološke postaje i analiza meteoroloških polja metodom prilagodbe funkcija.

5.2.1. Statistička kontrola podataka

Statistička kontrola je jedna od najrasprostranjenijih metoda kontrole podataka. Obično se kontrolira svaki element posebno. Najjednostavniji slučaj je odbacivanje podataka koji se nikad ne pojavljuju; na primjer, pozitivna temperatura zraka na plohi 500 hPa nikad se ne pojavljuje. Složenije varijante ove kontrole uzimaju u obzir empirijske statističke parametre. Jedna od varijanti je usporedba mjerenog podatka s procjenom varijable na postaji (ili određenoj visinskoj razini) na temelju podataka susjednih postaja (razina) po principu najmanje pogreške tj. optimalnom procjenom. [10]

Vektorska inačica optimalne procjene uključuje podatke s određenog broja postaja (K), s tim da se u pripremnoj fazi koriste i podaci s postaje za koju se provjera vrši (koriste se povijesni nizovi, tzv. vremenski nizovi podataka). Međutim, prilikom procjene stohastičke (meteorološke) varijable na određenoj postaji, izmjereni podatak s te postaje se ne uključuje u procjenu nego samo kao usporedni podatak naspram te procjene. Vektorska inačica optimalne procjene meteorološke varijable na postaji k, prema jedan je:

$$fa(r_k) = fb\,(r_k) + B_k^T \cdot\ [B + O]^{-1}\ \cdot\ [f_o\ -\ f_b] \tag{44}$$

gdje indeks B označava preliminarnu procjenu, a indeks O mjerenje Dodatku, B i O su $k \times k$ matrice auto kovarijance pogrešaka preliminarne procjene odnosno mjerenja, fa i fb su k-stupac vektori preliminarne procjene odnosno mjerenja meteorološke varijable s elementima odnosno mjerenja meteorološke varijable s elementima fa i fb, a B_k^T stupac vektora s elementima $\langle \varepsilon B(rj), \varepsilon B(rk)\rangle$; $j = 1,2, \ldots, k$, koji predstavljaju auto kovarijance pogrešaka preliminarne procjene. Kao što se da primjetiti, u ovom izračunu, direktno se koristi funkcija i njeno ograničenje na određene elemente tj. broj postaje koja se uzima za usporedbu. [10]

5.2.2. Analiza meteoroloških polja

Kad su podaci prikupljeni i provjereni, može se prijeći na oblikovanje homogenijeg prikaza meteoroloških polja od onog koji se dobiva motrenjem. Na taj način omogućeno je i automatsko (računalno) ucrtavanje izopleta (linija istih vrijednosti) pojedinog elementa. U tu svrhu koristi se postupak tzv. objektivne analize. [10]

U dosadašnjem razvoju objektivne analize formirano je nekoliko metoda: prilagodba funkcija (polinomna i spektralna), metoda uzastopnih korekcija, statistička (optimalna) interpolacija i varijacijska metoda. Katkad, međutim, koriste se i druge metode, kao na primjer klasična interpolacijska metoda. [10]

5.2.3. Metoda prilagodbe funkcije

Ovaj tip analize pretpostavlja razvoj funkcije $fa\ (r), r\ = (x, y, z)$ u red oblika

$$\begin{aligned} fa\ (\mathrm{r}) &= \sum_{q}^{Q} c_a \cdot h_Q\ (r) \\ &= \sum_{mnl} c_{mnl} \cdot h_{mnl}(x, y, z) \\ &= \sum_{m} \sum_{n} \sum_{l} c_{mnl} \cdot h_m(x) \times h_l(z) \end{aligned} \tag{45}$$

gdje su $h_q(r)$, $h_{mnl}(x, y, z)$, odnosno $h_m(x), h_n(y), h_l(z)$, funkcije razvoja $C_q$odnosno C_{mnl} koeficijenti razvoja. Broj članova razvoja označen je s Q za "vektorski" slučaj, dok odgovarajući broj članova u "komponentnom" obliku nije eksplicitno naznačen i ovisi o odabranom rasponu indeksa za pojedinu dimenziju (komponentu) vektora položaja $r = (x, y\ , z)$. Funkcije razvoja mogu biti općenito definirane za čitavu Zemljinu atmosferu, a mogu biti polinomi, trigonometrijske ili empirijske funkcije. Posljednji oblik podrazumijeva tzv. separaciju varijabli. [10]

5.3. U IZGRANJI LUKA I LUKOBRANA

Planiranje i projektiranje luka neophodna su tehnološko-tehnička i industrijska obilježja sigurnosti brodova u luci, sigurnog odvijanja procesa unutar luke kao i sigurnosti lučkih građevina i prekrcajnih postrojenja.

Za uspješnu izgradnju i projektiranje luke neophodno je poznavanje matematike i hiperboličnih funkcija što će biti pokazano na primjeru izrade lukobrana u nautičkoj marini.

5.3.1. Projektiranje lukobrana u marini

Glavna vanjska lučka građevina je lukobran koji štiti brodove i opremu u luci ili marini od utjecaja vjetra i ponajprije valova.

Konstruiranje i izgradnja lukobrana je složen i kompliciran projekt specifičan za svaku luku ili marinu posebno. Ovisno o tipu, veličini, svrsi te posebice geografskom položaju luke za svaku se izgrađuje poseban lukobran koji odgovara na vremenske uvijete u tom području.

Za kvalitetno konstruirane vanjske lučke objekte potrebno je provesti kalkulacije svih sastavnica koje bi mogle pozitivno ili negativno utjecati na samu infrastrukturu tijekom i nakon izgradnje. Kao primjer, uzet je plan izgradnje lukobrana, odnosno izračun maksimalne valom izazvane sile i momenta na lukobran po jediničnoj dužini. Za potrebe ovog izračuna, određeno je da je lukobran izgrađen od vertikalnih betonskih ploča oslonjenih na pilote, dubina vode na strukturi iznosi 4 m, a ploče imaju otvor od 0,5 m na dnu radi povećanja cirkulacije vode u marini. Ploče se pružaju 1,5 m iznad razine mirne vode, a njihova dužina iznosi 5 m. Visina upadnog vala iznosi 1 m, a period vala traje 5 sekundi. Pretpostavlja se da je mirna voda sa zavjetrinske strane luke. [11]

Dužina vala srednje dubokog mora dobiva se postupkom iteriranja funkcije:

$$L = \frac{g \cdot T^2}{2 \cdot \pi} \times \tanh \frac{2 \cdot \pi \cdot d}{L} = 33{,}57\, m \qquad (46)$$

$$L_0 = \frac{g \cdot T^2}{2 \cdot \pi} = 43{,}86\, m \qquad (47)$$

gdje je: g ubrzanje sile teže, T period vala, $\tanh$ hiperbolični tangens i d dubina vode na strukturi.

Valni broj k dobije se uvrštavanjem dužine vala srednje dubokog mora u formulu:

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{L} = 0{,}1870 \tag{48}$$

Razlika srednje razine mora i razine mirnog mora dobije se:

$$\Delta Z = \frac{\pi \ \cdot \ H^2}{L} \ \cdot \ \coth(k \ \cdot d) \tag{49}$$

$$\Delta Z = 0{,}13 \ m \tag{50}$$

Maksimalni dinamički pritisak na dno računa se kao:

$$\mathrm{P}_d = \frac{p \ \cdot \ d \ \cdot H}{\cosh(k \ \times d)} \tag{51}$$

$$\mathrm{P}_d = 7207{,}6 \ N/m^2 \tag{52}$$

gdje je:

- $\rho \cdot g \cdot H$ hidrostatički tlak, gustoća · ubrzanje sile teže · visina stupca tekućine,
- cosh hiperbolični kotangens. [11]

Pritisci na zid za dubine *Z*:

$$\begin{gathered} Z_1 = \ 0{,}95 \ + \ 0{,}13 \ = \ 1{,}08 \qquad p_1 = \ 0 \\ Z_2 = \ -4{,}0 \ m, \quad p_2 = \ 9810 \ \cdot \ 4 \ + \ 7207{,}6 \ = \ 46647{,}6 \ N/m^2 \\ Z_3 = \ -3{,}5 \ m, \\ p_3 = \ 46447{,}6 \ \cdot \ [(3{,}5 + 0{,}95 + 0{,}13 \ )/(4 + 0{,}95 + 0{,}13 \ )] \\ = \ 41875{,}9 \ N/m^2 \end{gathered} \tag{53}$$

gdje je *P* gustoća fluida. Ukupna vrijednost sile po jedinici dužine iznosi:

$$\frac{41875{,}9}{2} \cdot (3{,}5 + 0{,}95 + 0{,}13) = 95895{,}8 \ N/m \tag{54}$$

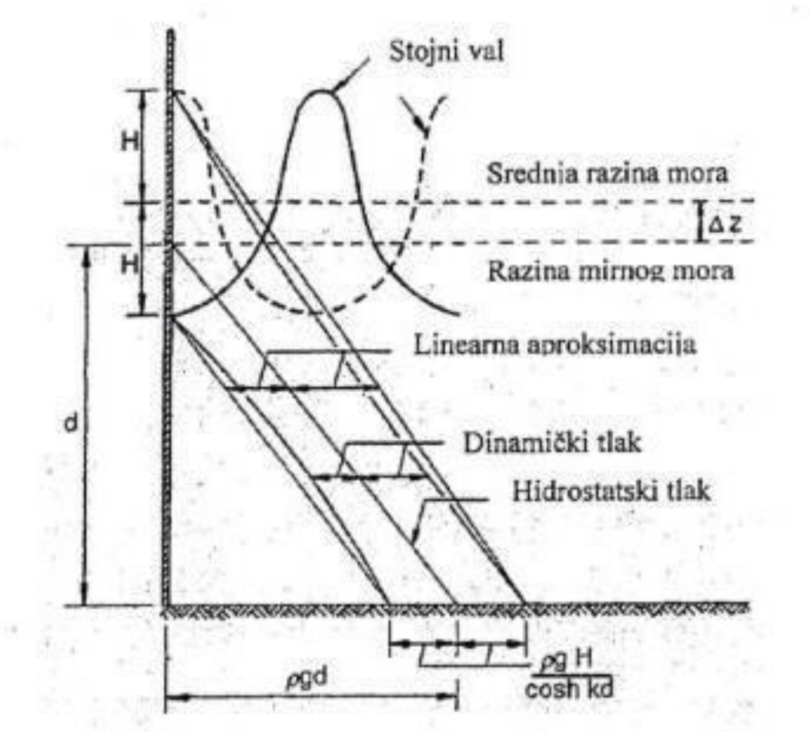
Djelovanje sile na visini:

$$0{,}5 + \frac{(3{,}5 + 0{,}95 + 0{,}13)}{3} = 2{,}026 \ m \tag{55}$$

Moment po jedinici dužine na morsko dno:

$$95895{,}8 \ \cdot \ 2{,}026 \ = \ 194248{,}9 \ N/m \tag{56}$$

Slika grafički prikazuje raspodjele tlakova stojnog vala na vertikalni zid, odnosno elemente izračuna valom izazvane sile i momenta na lukobran po jediničnoj dužini. [11]



Slika 15. Raspodjele tlaka stojnog vala na vertikalnom zidu. [11]

6. ZAKLJUČAK

Pomorstvo kao djelatnost i matematika kao znanost usko su povezani. Upravo zbog čovjekove potrebe da plovi svjetskim morima i u početku otkriva, a kasnije spaja različite dijelove svijeta, funkcije, kao dio matematike bile su neophodno potrebne.

Kao što je prikazano u ovom radu matematičke funkcije su omogućile čovjeku da u bilo kojem trenutku, bilo koristeći objekte na zemlji ili one na nebu, može odrediti svoju trenutnu poziciju bilo gdje na zemlji ili jako precizno isplanirati putovanje do najudaljenijih luka. Također korištenjem raznih funkcija čovjek je sagradio luke i marine za zaštitu i pristajanje svojih brodova, koje danas povezuju svjetsku trgovinu i turizam.

Uz pomoć poznavanja i primjene matematike danas nastaju sve veći i veći brodovi koji su sposobni prenositi sve više tereta i putnika. Pomorstvo je napredovalo i napreduje i dalje, velikom brzinom, upravo zbog mogućnosti matematičkog rješavanja problema.

Naravno da pomorci, u svakodnevnom životu, ne koriste komplicirane matematičke formule ali se primjenom istih uvelike, ne samo omogućilo pomorcima da obavljaju svoj posao već se isti i olakšao. Naime, sama konstrukcija broda zahtjeva znanje i primjenu matematike, brojni moderni elektronički navigacijski uređaji rade zahvaljujući matematičkim formulama, proračun stabilnosti broda je olakšan izradom matematičkih tablica, … Moglo bi se tako nabrajati do beskonačnosti, a iz svega toga da se zaključiti kako matematika, a samim tim matematičke funkcije mogu bez pomorstva dok pomorstvo nikako ne može bez znanja i primjene matematike. Mnogobrojni primjeri iz prakse potvrđuju nepisano pravilo.

Dakle bez matematike, posebice primjena matematičkih funkcija, pomorstvo kakvo danas poznajemo, gotovo sigurno, ne bi postojalo.

LITERATURA

[1] M. Klaričić-Bakula, Uvod u matematiku, Split, 2007.

[2] B. Dakić i N. Elezović, Matematika4, zagreb, 2014.

[3] https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=43139. [Mrežno]. [Pokušaj pristupa 29 8 2021].

[4] »https://hr.wikipedia.org/wiki/Bijekcija,« [Mrežno]. [Pokušaj pristupa 20 8 2021].

[5] »https://hr.yestherapyhelps.com/the-13-types-of-mathematical-functions-and-their-characteristics-15446,« [Mrežno]. [Pokušaj pristupa 23 8 2021].

[6] A. I. Simović, Terestrička navigacija, zagreb, 1996..

[7] M. Zadelj-Martić, Loksodroma i ortodroma.

[8] Z. Lušić, Astronomska navigacija, Split, 2012.

[9] A. I. Simović, Navigacijska meteorologija, Zagreb, 1997.

[10] »https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/Pandzic_Analiza_met_polja_i_sustava%5B1%5D.pdf,« [Mrežno]. [Pokušaj pristupa 11 9 2021].

[11] M. Prskalo, Obalno inženjerstvo – Luke i pomorske građevine, Zbirka riješenih zadataka, Mostar, 2009.

[12] https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/Pandzic_Analiza_met_polja_i_sustava%5B1%5D.pdf. [Mrežno]. [Pokušaj pristupa 8 9 2021].

[13] https://www.mathos.unios.hr/matefos/Files/predavanja/p3.pdf. [Mrežno]. [Pokušaj pristupa 15 8 2021].

[14] http://www.unizd.hr/portals/1/nastmat/terestrika/ae_terestrika5.pdf. [Mrežno]. [Pokušaj pristupa 1 9 2021].

POPIS SLIKA